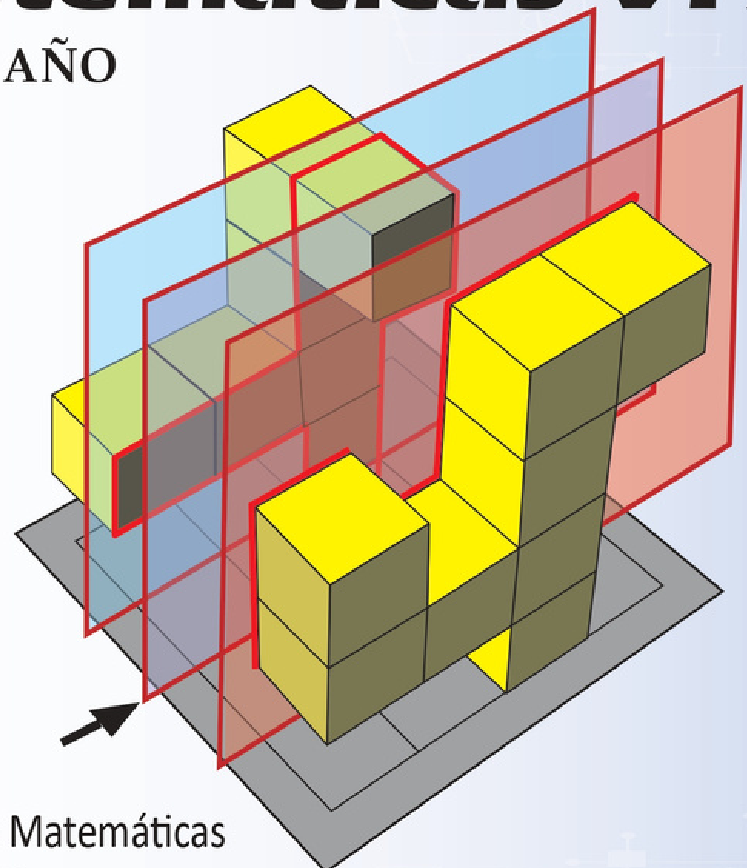
Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional Preparatoria

SECRETARÍA ACADÉMICA

Matemáticas VI Área IV

SEXTO AÑO



Colegio de Matemáticas

Clave: 1620

Plan: 96

Actualización curricular 2018

Cristina Alvarado Valencia

Rogelio González Zepeda

Maricela Lugo Zacarías

Leticia Sánchez López

COLECCIÓN

Guías ~ Cuadernos

de trabajo académico

Matemáticas VI Área IV Sexto Año Clave: 1620 Plan: 96 Actualización curricular 2018 Colegio de Matemáticas

Guías ~ Cuadernos de trabajo académico

GUÍA CUADERNO DE TRABAJO DE

MATEMÁTICAS VI (ÁREA 4)

BACHILLERATO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria
Colegio de Matemáticas

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

COLEGIO DE MATEMÁTICAS

ÁREA IV HUMANIDADES Y ARTES

Sexto año **Clave 1620** **Plan 1996**

MATEMÁTICAS VI

Guía cuaderno de trabajo académico
Programa actualizado
Aprobado por H. Consejo Técnico el 13 de abril 2018

Bachillerato

Coordinación

Leticia Sánchez López

Martha Patricia Rodríguez Rosas

Revisión

Leticia Sánchez López

Autores

Cristina Alvarado Valencia

Rogelio González Zepeda

Maricela Lugo Zacarías

Leticia Sánchez López

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Escuela Nacional Preparatoria
Dirección General: Biól. María Dolores Valle Martínez
Secretaría Académica: M. en C. Ana Laura Gallegos y Téllez Rojo
Departamento de Producción Editorial: Lic. Roselia Edith Osorio Clark

Diseño de portada: DCG Edgar Rafael Franco Rodríguez
Diseño editorial: Leticia Sánchez López
Cuidado de edición: Jonathan Iván Jiménez Castellanos

Primera edición: abril, 2024

Impreso en México.

PRESENTACIÓN

La Escuela Nacional Preparatoria, institución educativa con más de 150 años de experiencia formando jóvenes en el nivel medio superior, busca la constante actualización y mejora de sus materiales de apoyo a la docencia, así como la publicación de nuevos ejemplares, siempre teniendo en mente a nuestros alumnos y su aprovechamiento.

Después de varios años de trabajo, reflexión y discusión, se lograron dar dos grandes pasos: la actualización e implementación de los programas de estudios de bachillerato y la publicación de la nueva colección de Guías de Estudio. Sin embargo, los trabajos, resultado del espíritu crítico de los profesores, siguen dando fruto con publicaciones constantes de diversa índole, siempre en torno a nuestro quehacer docente y a nuestros programas actualizados.

Ciertamente, nuestra Escuela Nacional Preparatoria es una institución que no se detiene, que avanza con paso firme y constante hacia su excelencia académica, así como preocupada y ocupada por la formación integral, crítica y con valores de nuestros estudiantes, lo que siempre ha caracterizado a nuestra Universidad Nacional.

Aún nos falta más por hacer, por mejorarnos cada día, para que tanto nuestros jóvenes estudiantes como nuestros profesores seamos capaces de responder a esta sociedad en constante cambio y a la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad de la Nación.

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
BIÓL. MARÍA DOLORES VALLE MARTÍNEZ
DIRECTORA GENERAL
ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

Introducción

La *Guía-Cuaderno de trabajo académico* es un auxiliar didáctico para el estudio de los contenidos del programa de Matemáticas VI área IV que facilitará la preparación del alumnado que presentará el examen extraordinario.

La revisión de los contenidos de cada una de las tres unidades se realiza a través de situaciones problemáticas relacionadas con artes visuales, historia, literatura, arquitectura, juegos, acertijos, entre otros; de las que se derivan reactivos de opción múltiple, como se presentan en los exámenes extraordinarios. Para dar solución a estas preguntas, se presentan en recuadros grises los contenidos del programa relacionados con los conceptos numéricos, algebraicos, geométricos y lógicos, propiciando el desarrollo de las habilidades de simbolización, abstracción, generalización, visualización y predicción, necesarias para comprenderlos. De esta manera se pretende dar significado a cada uno de los conceptos estudiados.

La Unidad 1, *Matemáticas en el arte,* contiene situaciones que permitirán a las y los estudiantes acercarse a manifestaciones artísticas de la cultura universal que promoverán su creatividad e imaginación al descubrir la matemática presente en ellas y propiciando, al mismo tiempo, el desarrollo de habilidades de expresión simbólica.

En la Unidad 2, *Ideas numéricas,* se proponen problemas en los que la historia y la geometría se entrelazan para dar significado a ideas numéricas relacionadas con números de gran importancia en el desarrollo de la matemática, como son el número pi, el cero, los números irracionales, los imaginarios o el concepto del infinito. Además, se continúa con propuestas que promueven el desarrollo de habilidades para el reconocimiento de patrones numéricos y geométricos.

En la Unidad 3, *Paradojas y acertijos,* se presentan situaciones en las que el estudiante deberá analizar proposiciones, juegos y sus reglas, acertijos para proponer conjeturas y ofrecer argumentos basados en un razonamiento lógico, que le permitan desarrollar habilidades para la resolución de problemas.

Es importante señalar que esta *Guía-Cuaderno de trabajo*, contiene la teoría básica de los conceptos matemáticos establecidos en el programa de estudio de Matemáticas VI Área IV, y que algunas de las definiciones se presentan solo como una primera aproximación a la formalidad matemática. Se espera que las y los estudiantes se sientan motivados a continuar su estudio con mayor profundidad. Se incluyen actividades de reforzamiento para que el alumno ponga a prueba lo aprendido y al final se incluyen dos versiones de exámenes tipo para familiarizar a las y a los estudiantes a la forma y estructura de un examen extraordinario.

Índice

UNIDAD 1. MATEMÁTICAS EN EL ARTE

Objetivo específico

El alumno:

- Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, expresión y comunicación simbólica a través de la visualización y reconocimiento de los elementos geométricos presentes en diversas manifestaciones artísticas de la cultura universal, enmarcadas en su contexto histórico, así como de la creación de manifestaciones propias, para promover su creatividad, imaginación y expresión mediante el uso de símbolos.

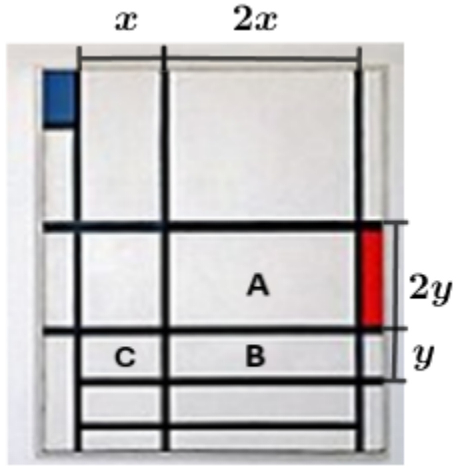
Situación 1. Los diseños de Mondrian

Piet Mondrian (1872-1944) fue un pintor vanguardista neerlandés. En los años sesenta, Yves Saint Laurent lanzó al mercado una colección inspirada en el trabajo de Mondrian. En la imagen se observa un diseño de Y.S. Laurent y una pintura de Mondrian.

Diseños de Mondrian

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1965_Mondrian_dress_by_Yves_Saint_Laurent_et_Pier_Mondrian_(Mus%C3%A9e_national_d%27art_moderne,_Paris).jpg

1.1 Observa los rectángulos A, B y C marcados en la pintura de Mondrian (figura 1.1) y elige la afirmación verdadera relacionada con el concepto de semejanza.



$y < x$

Figura 1.1

A) El rectángulo A y el rectángulo B son dos figuras semejantes
B) El rectángulo C y el rectángulo B son dos figuras semejantes
C) El rectángulo A y el rectángulo C son dos figuras semejantes
D) Los rectángulos A, B y C son semejantes entre sí

Dos polígonos son **semejantes** cuando todos sus ángulos son iguales y sus lados homólogos (correspondientes) son proporcionales. Dos magnitudes a, b son directamente proporcionales si existe un número k tal que $b = k \cdot a \Leftrightarrow k = \frac{b}{a}$ Al número k se le conoce como constante de proporcionalidad. Para que dos triángulos sean semejantes es suficiente que sus ángulos sean iguales, pero esto es falso para polígonos no regulares con más de tres lados.

Solución:
Respecto a la igualdad de los ángulos no tenemos problema puesto que se trata de rectángulos.
Debemos analizar si los lados correspondientes de los rectángulos A y B son proporcionales. Las dos posibilidades de que se tenga la proporcionalidad entre los lados correspondientes de los rectángulos son:

$$k = \frac{2x}{2x} = \frac{2y}{y}$$

Pero lo anterior implicaría que 1=2, lo cual es evidentemente falso.
La otra posibilidad es que:

$$k' = \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$$

Esto implicaría que $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$. Que también resulta falso si asumimos que $x \neq y$. Como conclusión, los rectángulos A y B no son semejantes.
Razonando de la misma forma para los rectángulos B y C, las dos posibilidades de que los lados de éstos sean proporcionales son:

$$\frac{2x}{x} = \frac{y}{y}$$
$$\Rightarrow 2 = 1$$

Lo cual es falso, y la otra posibilidad es que

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2x}$$
$$\Rightarrow 2x^2 = y^2$$

Y como sabemos que x, y son positivos y además $y < x$, se puede deducir que:

$$y^2 < x^2$$
$$y^2 < 2x^2$$

No podría cumplirse que $2x^2 = y^2$ y por lo tanto los rectángulos B y C no pueden ser semejantes.

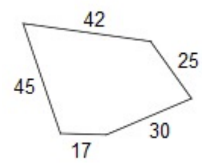
Si los rectángulos A y B no son semejantes, al igual que los rectángulos B y C; se sigue que el inciso D también es falso.
Ahora analicemos el caso de los rectángulos A y C. En este caso se cumple que sus lados homólogos sí son proporcionales ya que:

$$\frac{2x}{x} = \frac{2y}{y} = 2$$

Respuesta correcta: **C) El rectángulo A y el rectángulo C son dos figuras semejantes**
Como puedes observar, para que dos polígonos sean semejantes no basta con que se "parezcan en su forma", se debe comprobar la proporcionalidad de sus lados correspondientes y la igualdad de sus ángulos, que en el caso de las figuras de la pregunta, eran todos iguales por ser rectángulos.

Situación 2. Escala de reducción y ampliación
Considera las siguientes figuras como un plano y un terreno en una zona rural, respectivamente. El plano es la representación a escala del terreno y las medidas

están dadas en centímetros. Se sabe que las figuras son semejantes y que longitud del lado ***e*** es 11.25 metros lineales.



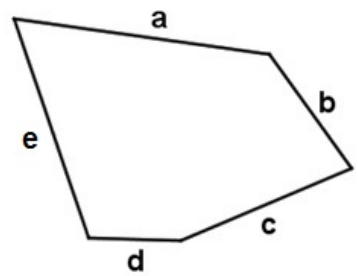


Figura 1.2 Plano (Alanís, 2012) **Figura 1.3** Terreno

2.1 ¿Cuáles son las medidas reales *a*, *b*, *c* y *d* del terreno?

A) $a = 10.50\ cm;\ b = 6.25\ cm;\ c = 7.50\ cm;\ d = 4.25\ cm$
B) $a = 105\ cm;\ b = 62.5\ cm;\ c = 75\ cm;\ d = 42.5\ cm$
C) $a = 10.50\ m;\ b = 6.25\ m;\ c = 7.50\ m;\ d = 4.25\ m$
D) $a = 1050\ m;\ b = 625\ m;\ c = 750\ m;\ d = 425\ m$

Solución:
Para determinar la constante de proporcionalidad k, se deben considerar los valores $x_1 = 45\ cm, y_1 = 1125\ cm$, (observa que los metros se han convertido a centímetros para que las unidades de medida sean las mismas) y sustituirlos en $y = kx$

Así $1125\ cm = k(45\ cm)$, de donde $k = \dfrac{1125\ cm}{45\ cm} = 25$

Entonces $y = (25)(x)$. Esta expresión se usará para calcular los valores de a, b, c y d.

Así:
$a = (25)(42) = 1050\ cm;\ b = (25)(25) = 625\ cm;\ c = (25)(30) = 750\ cm;\ d = (25)(17) = 425\ cm$
Y entonces las medidas reales del terreno son:
$a = 10.50\ m;\ b = 6.25\ m;\ c = 7.50\ m;\ d = 4.25\ m$

Respuesta correcta: **C)** $\mathbf{a = 10.50}\ \boldsymbol{m};\ \mathbf{b = 6.25}\ \boldsymbol{m};\ \mathbf{c = 7.50}\ \boldsymbol{m};\ \mathbf{d = 4.25}\ \boldsymbol{m}$

2.2 ¿Cuál es la escala del plano?

A) $1:2.5$
B) $1:25$
C) $0.25:1$
D) $25:1$

La **escala** es la razón que nos permite conocer la relación de semejanza que existe entre las dimensiones de un dibujo y las dimensiones del objeto real que representa.

La escala indica qué tanto se está reduciendo o ampliando el objeto original. Es decir, el objeto real se multiplica por un factor y se representa como un dibujo en un plano o un mapa.

La notación para representar una escala es $p:q$. Y se lee "escala p a q, por ejemplo, escala 1:10 ("escala uno a diez"), de la cual 1 centímetro en el dibujo representa 10 centímetros en la realidad. Si el dibujo es diez veces menor que la realidad, lo será en centímetros, metros, kilómetros o en la unidad que se quiera usar para la medida. Sin embargo, cuando se plantea un problema en donde se quiere saber la escala, las medidas deben estar representadas en la misma unidad.

Como la escala es una razón, el método para encontrar cualquiera de las variables en el planteamiento de un problema de escalas es el mismo que se planteó para calcular la constante de proporcionalidad en el bloque anterior.

Solución:
Dado que uno de los lados del pentágono del plano mide 45 centímetros y su correspondiente es el lado ***e*** del terreno que mide 11.25 metros, y ambas longitudes deben expresarse en la misma unidad de medida, el lado *e* mide 1125 centímetros, entonces el factor de escala es la razón (r) entre el valor del plano y el valor real.
Así, 45 centímetros del plano es a 1125 centímetros del terreno, entonces:

$$r = \frac{valor\ del\ plano}{valor\ real}$$

$$r = \frac{45}{1125} = \frac{1}{25}$$

$$r = \frac{1}{25}$$

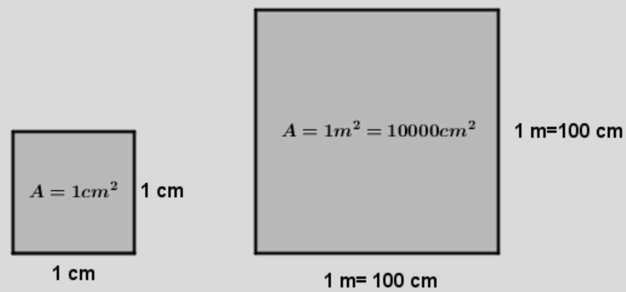
El resultado debe interpretarse como 1 centímetro en el plano representa 25 centímetros en el terreno.
Por lo tanto, la escala del plano es $1:25$
Respuesta correcta: **B) $\mathbf{1:25}$**

2.3 Si el área del pentágono en el plano es 1 358.6 centímetros cuadrados, ¿cuál es el área real del terreno?

A) $84.91\ m^2$
B) $339.65\ m^2$
C) $33.965\ m^2$
D) $8491.25\ m^2$

La razón entre las longitudes correspondientes de dos polígonos semejantes es lineal, en cambio, la razón entre sus áreas es cuadrada dado que tiene dos dimensiones.

Por ejemplo, si la escala es $1:100$, la relación es 1 centímetro del plano representa 100 centímetros en la realidad, visto de otra manera, 1 centímetro del plano representa 1 metro en la realidad. Ahora, el área de un cuadrado de 1 centímetro de lado es $1\ cm^2$ y el área de un cuadrado de 1 metro de lado es $1\ m^2$, pero $1\ m^2$ es $(100\ cm)^2 = (100)^2\ cm^2 = 10\ 000\ cm^2$, lo cual no es $100\ cm^2$ como pudiera haberse pensado.



Entonces, el factor en que aumenta o disminuye el área es igual al cuadrado del factor de escala, es decir r^2.

Solución:
Si el área del pentágono del plano es 1 358.6 centímetros cuadrados y la razón de escala es $\frac{1}{25}$, para calcular el área real del terreno se debe calcular el cuadrado del factor de proporción y multiplicarlo por el área del pentágono del plano. Así:

$$\frac{A_{plano}}{A_{terreno}} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 \Rightarrow \frac{1358.6\ cm^2}{A_{terreno}} = \frac{1}{625}$$

$$\Rightarrow A_{terreno} = \left(1358.6\ cm^2\right)\left(625\right) = 849\ 125\ cm^2$$

$$A_{terreno} = 849\ 125\ cm^2$$

Pero como $1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2$, entonces $849\ 125\ cm^2$ ¿cuántos metros cuadrados son?

$$x = \frac{\left(849\ 125\ cm^2\right)\left(1m^2\right)}{10\ 000\ cm^2} = 84.91\ m^2$$

Por lo tanto, el área real del terreno es $84.91\ m^2$

Respuesta correcta: **A)** $\mathbf{84.91\ m^2}$

Situación 3. Matrioshkas

Una matrioshka, también llamada muñeca rusa, es un conjunto de muñecas tradicionales rusas cuya originalidad consiste en que se encuentran huecas y en su interior albergan una nueva muñeca, y ésta a su vez a otra, en un número variable

que puede ir desde cinco hasta el número que se desee, siempre y cuando sea un número impar, aunque por la dificultad volumétrica, es raro que pasen de veinte. Se caracterizan por ser multicolores, o por la presencia de elementos decorativos en la pintura tales como jarrones o recipientes sostenidos por las muñecas. A veces las muñecas interiores son iguales entre sí, pero pueden diferenciarse en la expresión de la muñeca o en el recipiente que sostienen. La matrioshka con más muñecas de la que se tiene conocimiento posee setenta y cinco unidades.
Las figuras 1.4 y 1.5 muestran a tres matrioshkas (M1, M2, M3). Las matrioshkas M2 y M3 fueron generadas a partir de homotecias aplicadas a la matrioshka M1, con centro de homotecia en el punto O.

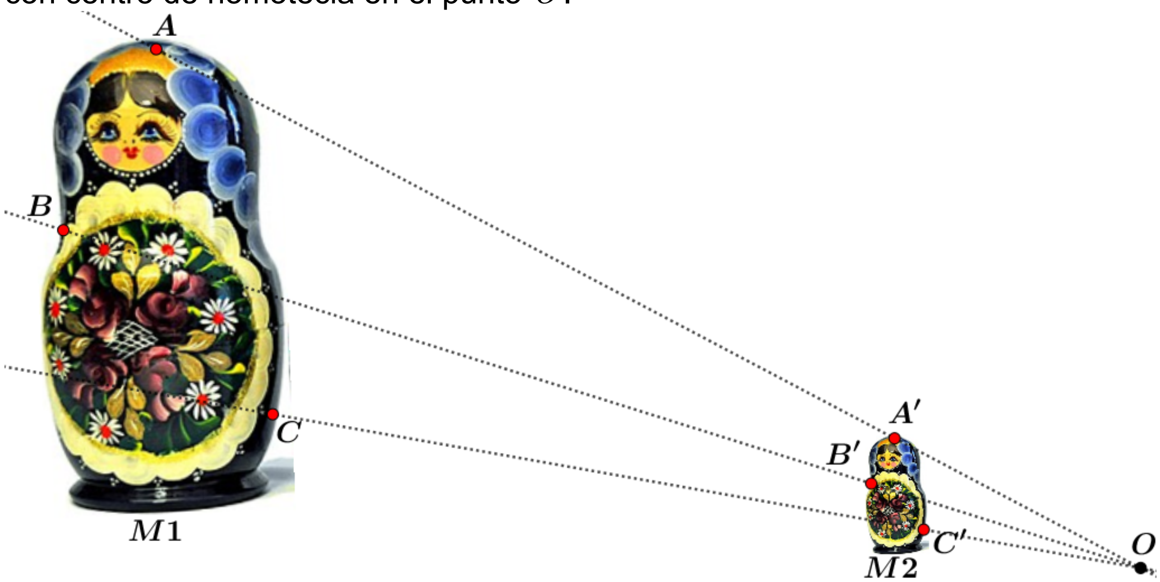


Figura 1.4

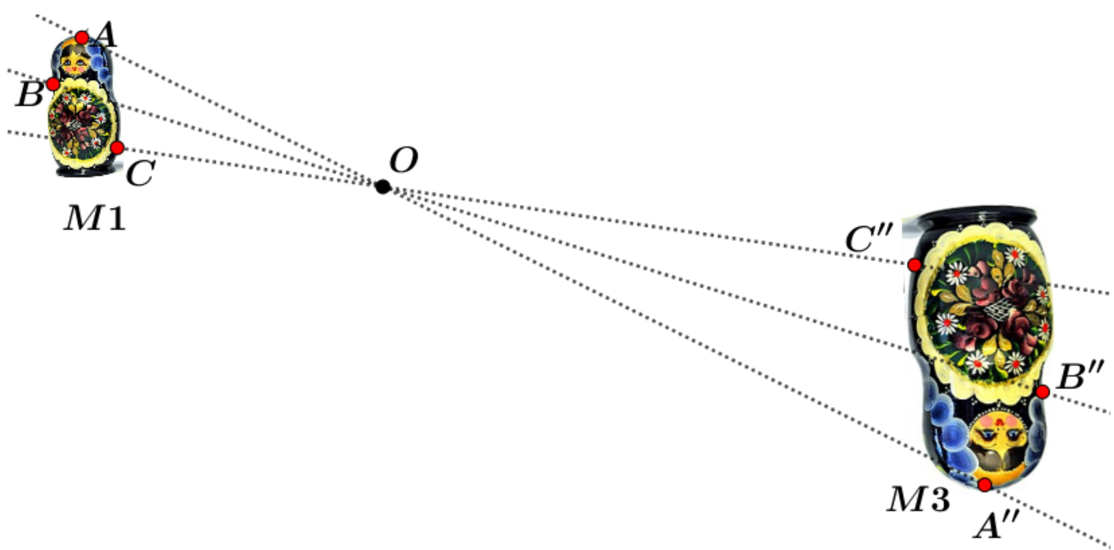


Figura 1.5

3.1 El enunciado correcto, relacionado con el factor de homotecia *k*, aplicado en M1 para obtener M2 (Figura1.4) es:

A) $|k| > 1$

B) $|k| < 1$

C) $k < 0$

D) $k > 1$

3.2 Si $\overline{OA} = 7.98\,cm$ $\overline{OA'} = 1.995\,cm$ (Figura 1.4), ¿cuál es el valor de *k*, la razón de homotecia?

A) $k = \frac{1}{4}$

B) $k = -4$

C) $k = -\frac{1}{4}$

D) $k = 4$

3.3 Es el enunciado correcto, relacionado con el factor de homotecia *k*, aplicado en M1 para obtener M3 (Figura1.5):

A) $|k| > 1$

B) $|k| < 1$

C) $k > 0$

D) $k > 1$

3.4 Si $\overline{OA} = 7.98\,cm$ $\overline{OA''} = 15.96\,cm$, ¿cuál es el valor de *k*, la razón de homotecia?

A) $k = \frac{1}{2}$

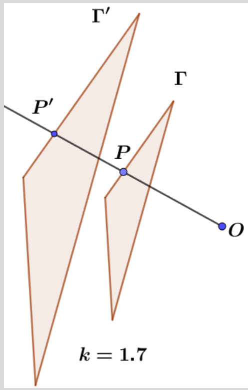
B) $k = -2$

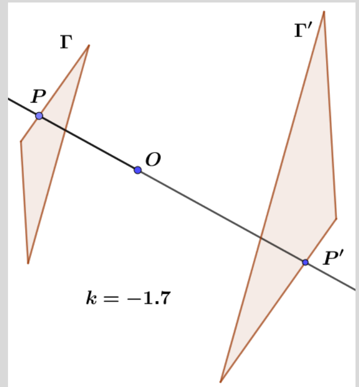
C) $k = -\frac{1}{2}$

D) $k = 2$

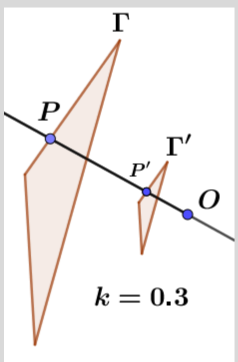
Una **homotecia** es una transformación geométrica plana.
Γ y Γ' son dos figuras homotéticas si existe un punto O y una constante $k \neq 0$ de manera que para cada punto P de Γ, hay un punto P' de Γ' tal que O, P, P' están alineados y $\frac{OP'}{OP} = k$. El punto O se llama centro de homotecia, la constante k se conoce como la razón de homotecia y P, P' son puntos homólogos.

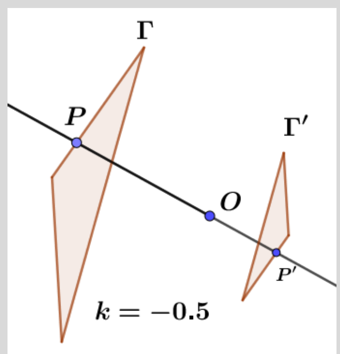
$|k| > 1$ produce la ampliación de la figura original





$|k| < 1$ produce la reducción de la figura original





Nota que si $k < 0$, la homotecia puede expresarse como la composición de una simetría con una homotecia de razón $|k|$, ambas con centro en el punto O

$k = -1$ produce una rotación de 180^0 con centro en el punto O

En el caso de los polígonos, la homotecia preserva las medidas de los ángulos, pero no la medida de los lados; sin embargo, el resultado genera figuras semejantes.

Solución:

Observa que en la figura 1.4 la homotecia con centro en O, provocó la reducción de la figura original. Por lo que se puede asegurar que $|k| < 1$, pero M2 no sufrió una rotación, por lo que no puede ser correcto el inciso D) $k < 0$.

Respuesta correcta de la pregunta 3.1 es **B)** $|k| < 1$

Por definición de la razón de homotecia, se tiene que $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{1.995}{7.98} = \frac{1}{4}$

Respuesta correcta de la pregunta 3.2 es **A)** $\frac{1}{4}$

En la figura 1.5, puede observarse que el efecto de la homotecia provocó una rotación de 180^0 de la matrioshka original (M1), por lo que M3 quedó del otro lado del centro de homotecia. Por lo tanto, k tiene un valor negativo. Además, M3 se amplificó con respecto a M1, por lo que se puede saber que k < -1 y su valor absoluto, entonces será mayor que 1. La respuesta correcta de la pregunta 3.3 es **A)** $|k|$ > 1

Para responder la pregunta 3.4, es preciso observar que $k < 0$ porque el resultado de haber aplicado la homotecia a M1, provocó una rotación de 180^0. Además,

$$|k| = \frac{OA"}{OA} = \frac{15.96}{7.98} = 2 \qquad \therefore k = -2$$

Respuesta correcta: **B)** $k = -2$

Situación 4. Estela del Rey Serpiente

En las dos primeras dinastías, una de las obras más importantes del arte egipcio es la estela del Dios Wadji, el Rey Serpiente. Es un bajorrelieve tallado en piedra caliza de 143 centímetros de altura, 65 cm de ancho y 25 cm de profundidad. En él figura un halcón que simboliza el faraón Horus mirando hacia el sol (al oeste, el dominio de los muertos), está posado en un marco rectangular vertical en relación áurea con un cuadrado que comprende la fachada del Palacio Real (representado por tres columnas), y en el rectángulo áureo recíproco aparece el jeroglífico de una serpiente que representa el nombre del Rey.

Figura 1.6 Stèle du roi-Serpent

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P1060241_Louvre_St%C3%A8le_du_roi-Serpent_rwk.JPG

4.1 Si el marco rectangular vertical mide de largo 47 cm, ¿cuál es el área aproximada del rectángulo donde está inscrita la serpiente?

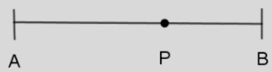
A) $521.45\ cm^2$

B) $843.9\ cm^2$

C) $1365.35\ cm^2$

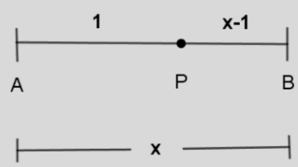
D) $2209.25\ cm^2$

La **proporción áurea** o el número de oro es una proporción que se da entre los sub-segmentos de un segmento. Un segmento AB queda dividido por un punto P en otros dos segmentos, AP y PB, de tal forma que el todo es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor.



Tan sólo existe un punto P que haga posible esta relación entre los segmentos y verifique la proporción $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$, que también se puede escribir como $\frac{AP+PB}{AP}=\frac{AP}{PB}$

Si $AB=x$ y $AP=1$, se tiene:



$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$$
$$x(x-1)=1$$
$$x^2-x=1$$

Al resolver la ecuación $x^2-x-1=0$ por fórmula general se obtienen dos soluciones, la positiva, que es la que interesa, es:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887498...$$

Este es el número de oro, es un número irracional y se le asigna el símbolo Φ (Phi)

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887498...$$

La proporción áurea tendrá el mismo valor con independencia de la longitud del segmento inicial.

Para efectos de cálculos se utilizará $\Phi=1.618$, y los valores obtenidos se redondearán a dos cifras decimales utilizando el símbolo $\approx$.

Solución:
Se pide calcular el área del rectángulo áureo recíproco donde está inscrita la serpiente, pero como se desconocen las longitudes de los lados, se procede de la siguiente forma:
En la figura 1.7 se ha representado dicho rectángulo en posición horizontal para

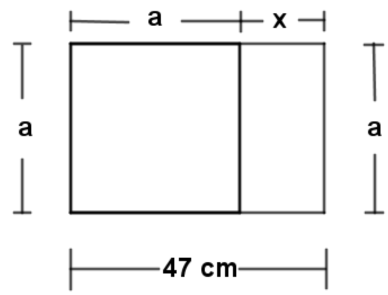


Figura 1.7

hacer el análisis, estimar los valores de a y x, y calcular el área $A_{RSerpiente}$.

Dado que el marco rectangular vertical está en relación áurea con el cuadrado que comprende las tres columnas, la razón está dada por:

$$\frac{47\ cm}{a} = \Phi$$

$$\frac{47\ cm}{a} = 1.618$$

$$a = \frac{47cm}{1.618}$$

$$a \approx 29.05\ cm$$

La longitud de 47 cm es la suma del lado a del cuadrado más el ancho x del rectángulo áureo recíproco.

Esto es $47 = a + x$, y como $a \approx 29.05\ cm$, entonces

$$x \approx 47 - a$$

$$x \approx 47 - 29.05.$$

$$x \approx 17.95\ cm$$

Así, $A_{RSerpiente} \approx (a)(x) \approx (29.05\ cm)(17.95\ cm) \approx 521.45\ cm^2$

Por lo tanto, el área aproximada del rectángulo donde está inscrita la serpiente es $521.45\ cm^2$

Respuesta correcta: **A)** $\mathbf{521.45\ cm^2}$

4.2 ¿En qué proporción se encuentra el bajorrelieve de la imagen respecto al original, si en la imagen el ancho del relieve mide 5 centímetros?

A) $\frac{1}{13}$

B) 0.13

C) 1.13

D) 13

Solución:

En la imagen la base mide 5 centímetros y su correspondiente en la original mide 65 centímetros, entonces el factor de escala es la razón entre el valor real y el valor en la imagen.
Si 1 centímetro de la base en la imagen es a *x* centímetros de la base original, entonces 5 centímetros de la base en la imagen es a 65 centímetros de la base original

$$x = \frac{valor\ real}{valor\ del\ plano} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{65}{5} = 13 \quad \Rightarrow \quad x = 13$$

El resultado debe interpretarse como 1 centímetro de la base en la imagen representa 13 centímetros en la original.

Por lo tanto, la proporción del bajorrelieve en la imagen respecto al original es $\frac{1}{13}$

Respuesta correcta: **A)** $\mathbf{\frac{1}{13}}$

Nota: Es importante detenerse aquí para hacer una reflexión sobre los términos que se han empleado. Basándose en el planteamiento de este problema, ¿cuáles serían las respuestas si se hubiese preguntado por la escala o la razón de proporcionalidad entre el bajorrelieve de la fotografía y el original?
La escala es 1:13
Lo cual significa que 1 centímetro de la base de la imagen representa 13 centímetros en la base original
La razón de proporcionalidad es 13
Es decir, al multiplicar la base de la imagen por 1.8, se obtendrá la base original, esto es $(5)(13) = 65$

La proporción es $\frac{1}{13}$, aproximadamente 0.077
Si bien representa la misma idea de la escala, también puede interpretarse como: aproximadamente 13 veces 0.077 es igual a 1 centímetro de la base original. Es decir, 0.077 centímetros de la base de la figura corresponden a 1 centímetro de la base original. Véase la figura 1.8

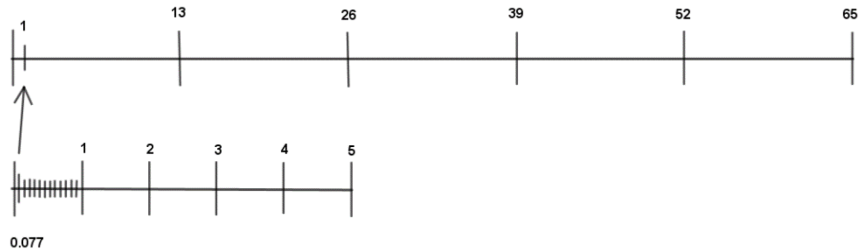


Figura 1.8

4.3 ¿Cuál sería el volumen de la estela original si se duplicara su tamaño?

A) $0.05\ m^3$

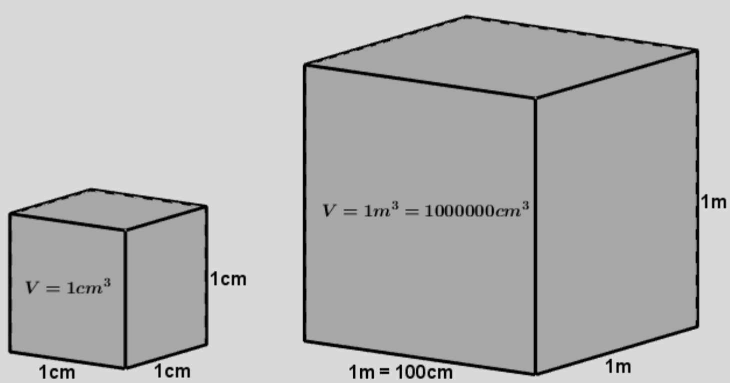
B) $0.46\ m^3$

C) $1.86\ m^3$

D) $4.66\ m^3$

Como se indicó antes, la razón entre las longitudes correspondientes de dos polígonos semejantes es lineal, y la razón entre las áreas es cuadrada dado que tiene dos dimensiones. En esta sección se revisará que la razón entre los volúmenes de dos poliedros semejantes es cúbica por tener tres dimensiones.

Por ejemplo, si la escala es $1:100$, la relación es 1 centímetro del plano representa 100 centímetros en la realidad, visto de otra manera, 1 centímetro del plano representa 1 metro en la realidad. Ahora, el volumen de un cubo de 1 centímetro de arista es $1\ cm^3$ y el volumen de un cubo de 1 metro de arista es $1\ m^3$, pero $1\ m^3$es $(100\ cm)^3 = (100)^3\ cm^3 = 1\ 000\ 000\ cm^3$



Entonces, el factor en que aumenta o disminuye el volumen es igual al cubo del factor de escala, es decir r^3.

Solución:

El volumen del relieve original en metros cúbicos es $V = (0.65m)(1.43m)(0.25m) = 0.23m^3$

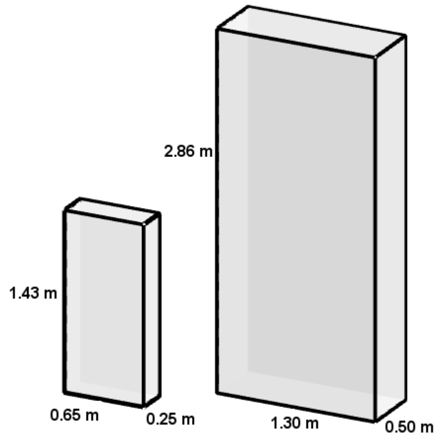


Figura 1.9

Si éste se duplica, la base, la altura y el fondo deben multiplicarse por dos, es decir,

$$V = (2)(0.65m)(2)(1.43m)(2)(0.25m) = (2)(2)(2)(0.65m)(1.43m)(0.25m)$$
$$= (2^3)(0.232375m^3) = (8)(0.232375m^3) = 1.86m^3$$

Por lo tanto, el volumen de la estela al duplicarse su tamaño es de $1.86m^3$

Respuesta correcta: **C) $\mathbf{1.86\ m^3}$**

Situación 5. Diseño de Frisos

Mariana trabaja como diseñadora en una compañía de losetas cerámicas especializada en fabricar piezas para el revestimiento de la contrahuella de escaleras.

Figura 1.10 Contrahuellas cerámicas (Sánchez, L.)

Se le encomendó la tarea de diseñar todos los frisos posibles al aplicar isometrías a este motivo generador.

Figura 1.11 Motivo generador (Alvarado, C)

5.1 Son las isometrías que puede usar Mariana en sus diseños:
A) homotecias, traslaciones, rotaciones y reflexiones
B) rotaciones, traslaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento
C) inversiones, rotaciones, reflexiones y homotecias
D) semejanzas, teselaciones, traslaciones y reflexiones

5.2 ¿Cuántos frisos diferentes puede crear Mariana?
A) 3
B) 5
C) 7
D) 9

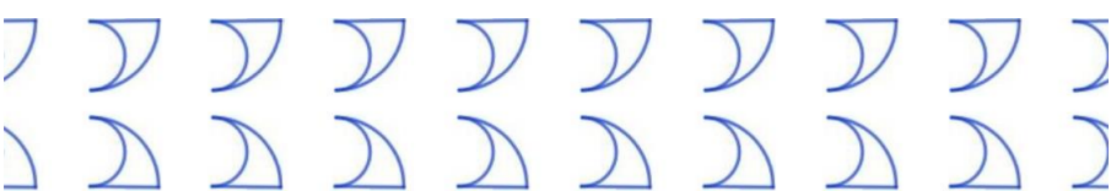
5.3 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:

A) rotaciones de 180^0
B) reflexiones
C) reflexiones con deslizamiento
D) traslaciones

5.4 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:

A) rotaciones de 180^0 y traslaciones
B) reflexiones
C) reflexiones con deslizamiento
D) traslaciones

5.5 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:



A) traslaciones
B) simetría horizontal y traslaciones
C) simetría vertical y reflexión
D) rotaciones de 180^0

5.6 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:

A) traslaciones
B) simetría horizontal y traslaciones
C) simetría vertical y traslaciones
D) rotaciones de 180^0

5.7 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:

A) reflexiones con deslizamiento y traslaciones
B) reflexión con respecto al eje vertical, giros de 180^0 y traslaciones
C) reflexión con respecto al eje horizontal, giros de 180^0 y traslaciones
D) dos reflexiones con respecto a los ejes vertical y horizontal, giros de 180^0 y traslaciones

5.8 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:

A) reflexión con respecto al eje vertical, giros de 180^0 y traslaciones

B) reflexión con respecto al eje horizontal, giros de 180^0 y traslaciones

C) dos reflexiones con respecto a los ejes vertical y horizontal, giros de 180^0 y traslaciones

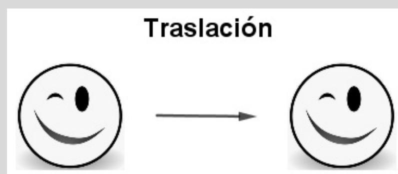
D) reflexiones con deslizamiento y traslaciones

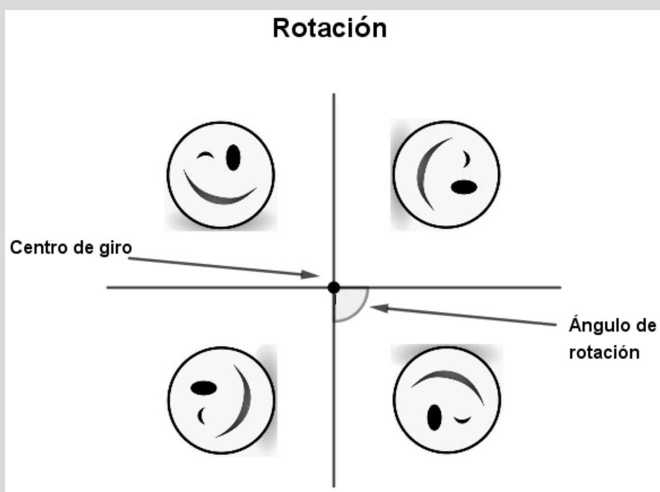
5.9 Son las transformaciones aplicadas al motivo generador (figura 1.11) para obtener el siguiente friso:

A) traslaciones
B) reflexiones verticales y rotaciones de 180°
C) reflexiones con deslizamiento y traslaciones
D) reflexiones con respecto a dos ejes verticales

Transformaciones geométricas. Las traslaciones o desplazamientos, las rotaciones o giros respecto a un punto, las simetrías axiales o reflexiones con respecto a una recta, y las reflexiones con deslizamiento, son transformaciones geométricas tales que, al aplicarse a un objeto no modifican ni su forma ni su tamaño, por lo que reciben el nombre de **isometrías**.

Las imágenes siguientes ilustran cómo una figura permanece invariable mediante la aplicación de dichos movimientos.





Un **motivo generador** es cualquier dibujo.
La **región mínima** es el límite del motivo generador, es una superficie tal que, al aplicarle los movimientos de un grupo de simetría determinado, generará un recubrimiento completo denominado tesela.
La **tesela** es cada una de las baldosas o piezas más pequeñas que se requieren para formar frisos y mosaicos a través de traslaciones. Las teselas pueden ser paralelogramos, rectángulos, cuadrados, rombos con lados iguales y ángulos diferentes a 60° y 90°, y rombos con lados iguales y ángulos de 60° y 120°.
Un **friso**, greca, cenefa o celosía, es una franja horizontal decorativa que corre a lo largo de la parte superior de una pared dentro o fuera de un edificio. La creación de un friso se da por medio de transformaciones geométricas cuya condición consiste en dejar invariante la recta que pasa por el centro, de esta forma solamente existen siete grupos de frisos diferentes. La tesela del friso es un rectángulo, independientemente del grupo al que pertenezca. Lo anterior se ejemplifica con la siguiente tabla.

Friso 1
Saltar en un pie.
Se aplica la transformación de traslación.

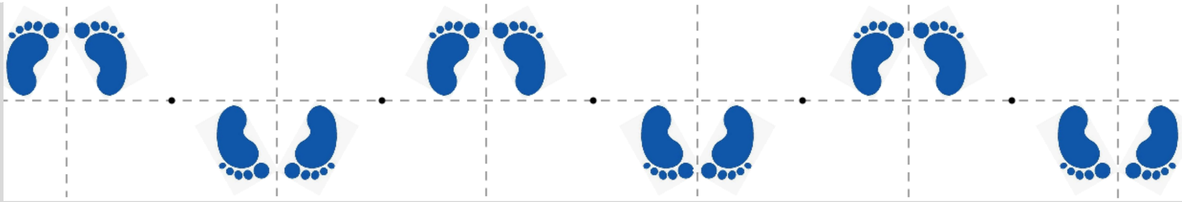
Friso 2
Saltar girando en un pie.
Rotaciones de 180° y traslaciones.

Friso 3
Saltar en dos pies.
Reflexiones con respecto a un eje horizontal y traslaciones.

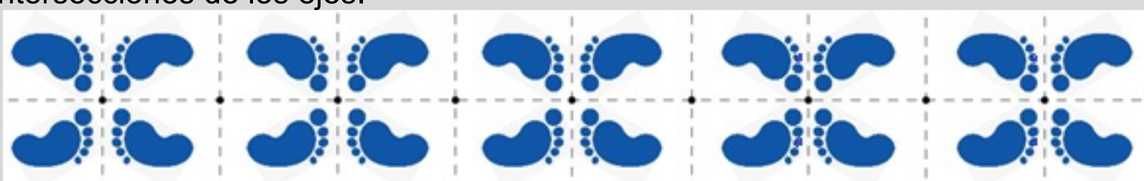
Friso 4
Saltar de lado en dos pies.
Reflexiones con respecto a un eje vertical y traslaciones.

Friso 5
Caminar.
Reflexiones con deslizamiento, y traslaciones.

Friso 6
Saltar de lado girando en dos pies.
Reflexiones verticales y rotaciones de 180° (ejes perpendiculares sin reflexiones horizontales), y traslaciones. Los centros de giros no se encuentran en las intersecciones de los ejes.

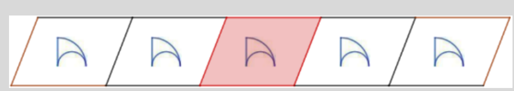


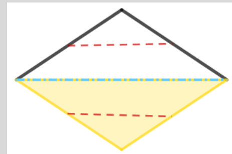
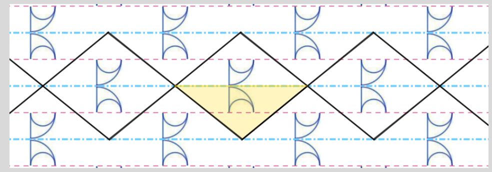
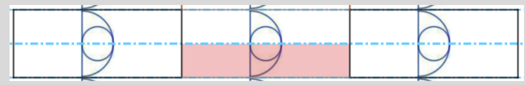
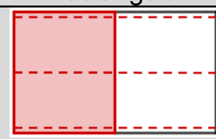
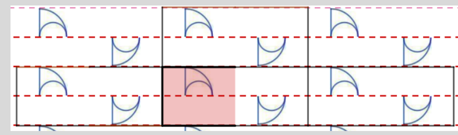
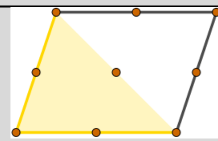
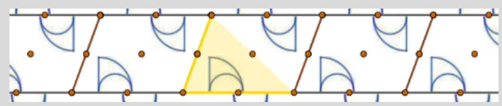
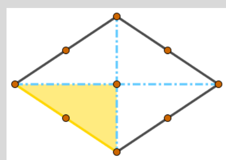
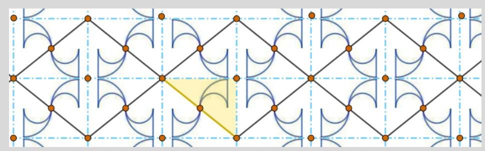
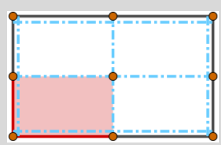
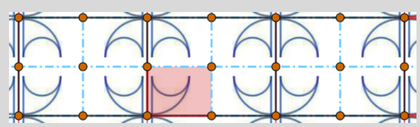
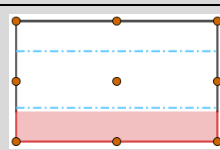
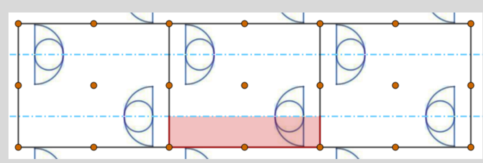
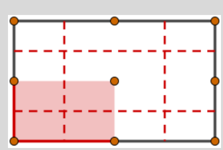
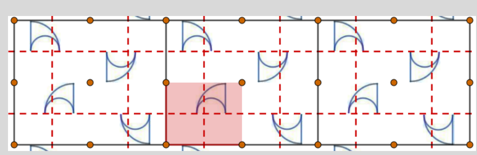
Friso 7
Saltar girando en dos pies.
Dos reflexiones con respecto a los ejes vertical y horizontal (ejes perpendiculares), giros de 180° y traslaciones. Los centros de giros se encuentran en las intersecciones de los ejes.

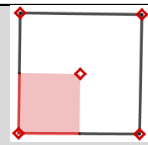
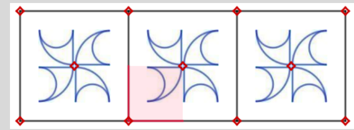
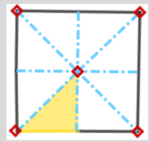
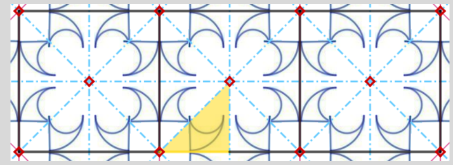
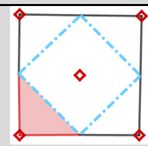
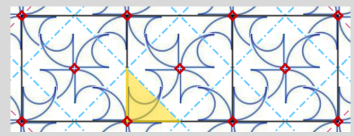
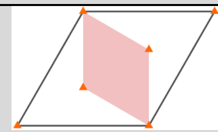
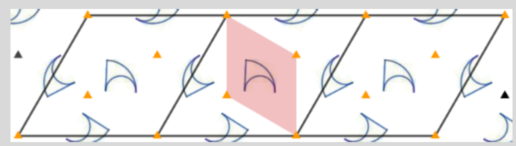
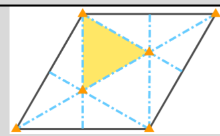
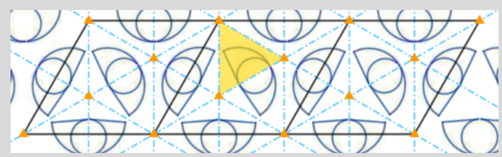
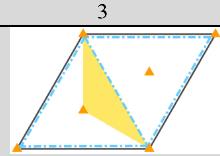
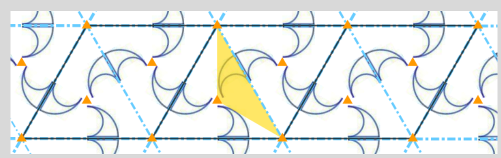
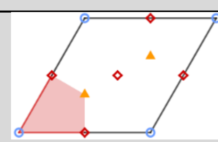
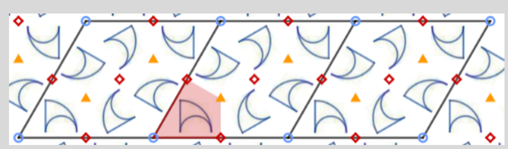
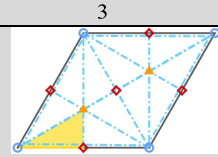
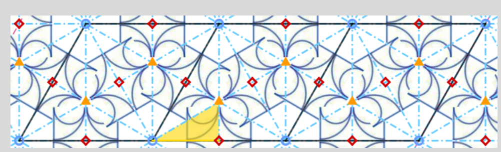


Un **mosaico** es el recubrimiento o teselación del plano con losetas que se trasladan en dos direcciones y que no deben ser superpuestas o dejar vacíos entre ellas, los polígonos que se mencionaron en párrafos anteriores son los que cumplen dicha condición. Existen 17 formas diferentes de cubrir el plano, y para referirse a cada una de ellas se utilizará la notación cristalográfica para representar el grupo de simetría al que pertenece. Debe comprenderse que la notación hace referencia a la combinación de las transformaciones geométricas; a la perpendicularidad que pueda existir entre los ejes de simetría (m); a los ángulos que se generan entre los ejes de reflexión para el deslizamiento (g); si los ejes se intersecan o no con los centros de giro, o si pasan por el centro (c) o uno de los lados de la tesela (p); y si el orden de rotación es 2, cuando el giro mínimo es 180°, si es de orden 3, cuando el giro mínimo es 120°, si es de orden 4, cuando el ángulo mínimo de rotación es 90°, o de orden 6, cuando el giro mínimo es 60°.
Cabe señalar, que entre los propósitos del programa de la asignatura de Matemáticas VI área IV y de esta guía, se encuentra el de leer e interpretar las posibles transformaciones geométricas que existan en un diseño, antes de considerar la posibilidad de memorizar la notación de las simetrías por parte del estudiantado.

Clasificación de los 17 grupos de simetría

Sin rotaciones			
Grupo		**Tesela**	*Ejemplo del motivo generador delimitado por la región mínima (sombra), ejes de simetría (—·—·—·—), ejes de reflexión con deslizamiento (– – – – –) y centros de giro (●, ◆, ▲, ○), definiendo la tesela que conforman.*
p1	Sólo existen traslaciones.	 Paralelogramo	

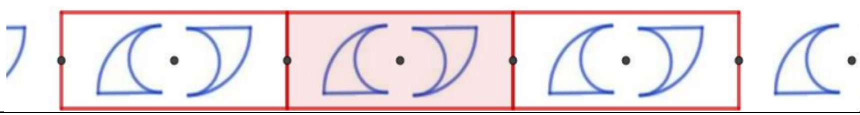
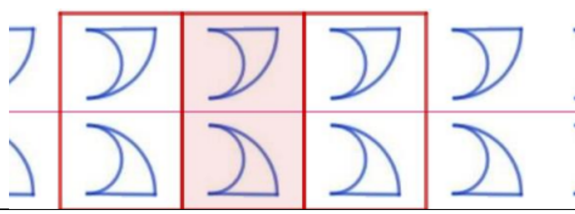
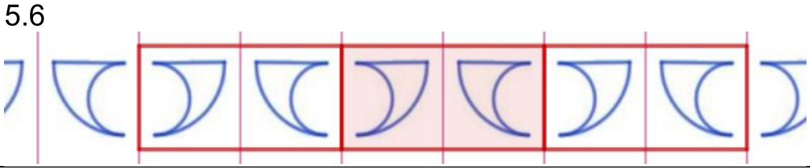
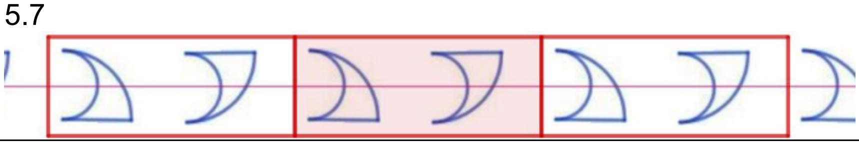
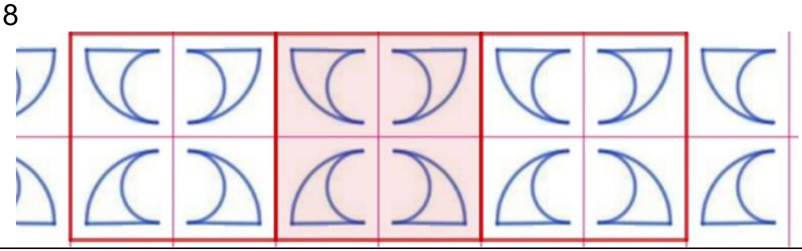
cm	Existen ejes de reflexión con deslizamiento (— — — — —) y ejes de simetría (—·—·—·—·—).	 Rómbica	
pm	Todos son ejes de simetría (—·—·—·—·—).	 Rectangular	
pg	Sólo hay ejes de reflexiones con deslizamiento (— — — — —).	 Rectangular	
Giros de 180°. Centro en			
p2	Únicamente hay rotaciones. No existen ejes de simetría (—·—·—·—·—).	 Paralelogramo	
cmm	Algunos centros de giro no están en los ejes de simetría (—·—·—·—·—). Los ejes de simetría son perpendiculares.	 Rómbica	
pmm	Los centros de giro están en los ejes de simetría (—·—·—·—·—). Los ejes de simetría son perpendiculares.	 Rectangular	
pmg	Los centros de giro no están en los ejes de simetría (—·—·—·—·—). Los ejes de simetría son paralelos.	 Rectangular	
pgg	Los centros de giro no están en los ejes de reflexión con deslizamiento (— — — — —). Los ejes de reflexión con deslizamiento son perpendiculares.	 Rectangular	
Giros de 90°. Centro en			

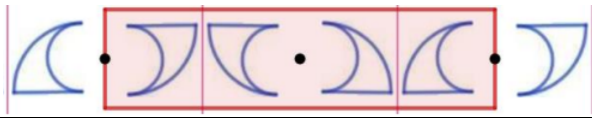
p4	Únicamente hay rotaciones. No existen ejes de simetría (—·—·—·—).	 Cuadrada	
p4m	Los centros de giro están en los ejes de simetría (—·—·—·—). Los ejes forman ángulos de 45°.	 Cuadrada	
p4g	Los centros de giro no están en los ejes de simetría (—·—·—·—).	 Cuadrada	
Giros de 120°. Centro en			
p3	Únicamente hay rotaciones. No existen ejes de simetría (—·—·—·—).	 Rómbica ($\frac{1}{3}$ de hexágono)	
p3m1	Los centros de giro están en los ejes de simetría (—·—·—·—).	 Rómbica ($\frac{1}{3}$ de hexágono)	
p31m	Algunos centros de giro no están en los ejes de simetría (—·—·—·—).	 Rómbica ($\frac{1}{3}$ de hexágono)	
Giros de 60°. Centro en			
p6	Únicamente hay rotaciones. No existen ejes de simetría (—·—·—·—).	 Rómbica ($\frac{1}{3}$ de hexágono)	
p6m	Los centros de giro están en los ejes de simetría (—·—·—·—). Los ejes forman ángulos de 30°.	 Rómbica ($\frac{1}{3}$ de hexágono)	

Solución:

Las isometrías que puede usar Mariana en sus diseños son rotaciones, traslaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento; con ellas pueden generarse siete frisos diferentes. Aunque los ejes de simetría verticales y horizontales pueden colocarse en diferentes distancias del motivo generador, cualitativamente resultarán los mismos frisos.
Por lo que la respuesta correcta de la pregunta 5.1 es **B) rotaciones, traslaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento**
Y la respuesta correcta de 5.2 es **C) 7**

Con base en el análisis presentado de los 7 frisos, en las siguientes imágenes mostrarán los frisos de las preguntas 5.3 a 5.9 con los ejes de simetría, centros de giro y las teselas sombreadas para que resulte clara la identificación de las transformaciones aplicadas al motivo generador.

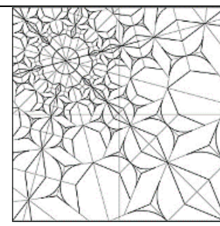
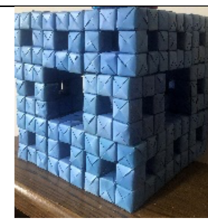
Pregunta	**Respuesta correcta**
5.3 	D) traslaciones
5.4 	A) rotaciones de 180^0 y traslaciones
5.5 	B) simetría horizontal y traslaciones
5.6 	C) simetría vertical y traslaciones
5.7 	A) reflexiones con deslizamiento y traslaciones
5.8 	C) dos reflexiones con respecto a los ejes vertical y horizontal, giros de 180^0 y traslaciones

5.9 	B) reflexiones verticales y rotaciones de 180°

Situación 6. Noción de estructura fractal

6.1 Una estructura fractal es:
A) autosimilar
B) diferenciable
C) homogénea
D) aleatoria

6.2 De las siguientes imágenes, elige las que tienen una estrecha relación con el concepto de estructura fractal:

I	II	III	IV
 Figura 1.12	 Figura 1.13	 Figura 1.14	 Figura 1.15

A) I, III
B) I, II
C) III, IV
D) I, IV

La palabra **fractal** fue inventada y usada por primera vez en 1975 por el matemático polaco Benoit Mandelbrot (1924-2010) para identificar un tipo de objetos que en algún tiempo fueron considerados como "estructuras patológicas o monstruosas", puesto que sus propiedades no encajaban con las reglas de la Geometría Euclidiana. El origen de la palabra fractal es el adjetivo latino fractus, proveniente del verbo frangere que significa "romper". La noción de estructura fractal, desde el inicio estuvo estrechamente relacionada con objetos concretos, como las costas, las nubes, o los rayos. Mandelbrot decía que las nubes no eran esferas, las montañas no eran conos, las costas no eran círculos y los rayos no viajaban en línea recta.

En la actualidad, el concepto de fractalidad ha sido útil para modelar fenómenos naturales o artificiales que tienen una estructura irregular o compleja, como las formas de algunas plantas, aparatos y sistemas de los seres vivos (vasos capilares, tubos bronquiales, redes neuronales), las galaxias, los terremotos, las señales de audio, las imágenes digitales, etc. Los fractales pueden ayudar a comprender mejor estos fenómenos y a optimizar su representación, análisis y procesamiento.

Una de las principales características de las estructuras fractales es que tienden a ser irregulares y autosimilares, aunque esta característica se presenta solo en sentido aproximado. La idea de la autosimilitud es que el objeto parece estar hecho de copias más pequeñas de sí mismo.
El tratamiento matemático de los fractales requiere conceptos especializados de topología, probabilidad, teoría del caos, sistemas complejos, entre otros. El propósito de este texto, lejos de profundizar en ellos, es mostrar cómo una idea matemática puede hacerse presente en ámbitos que pareciera no tendrían relación.

Solución:
La principal característica de los fractales es la autosimilitud, que consiste en que el objeto parece estar hecho de copias más pequeñas de sí mismo, por lo que la respuesta correcta a 6.1 es **A) autosimilar**.
Esta característica está presente en las imágenes **I**, el brócoli romanesco y en la IV, una iteración del sólido conocido como la esponja de Menger.
El brócoli romanesco es una variante del brócoli italiano, se puede comer crudo o hervido. Además, el número de inflorescencias (conjunto de flores, en este caso las estructuras en forma de pequeños conos) que tiene el brócoli romanesco es un número de Fibonacci.
Por otro lado, en un proceso infinito, el área de la Esponja de Merge tendería a infinito, pero su volumen tendería al valor 0.
La respuesta correcta es **D) I, IV**

Situación 7. Fractales en la obra de Pollock
Como introducción a la asignatura de Historia del Arte, el profesor Esteban, dejó que sus estudiantes investigaran la vida y obra del pintor estadounidense Jackson Pollock (1912-1956) y su relación con las matemáticas, concretamente con los *fractales*. Su técnica de gotear, chorrear o rociar (drip and splash), atrajo la atención de los científicos Richard P. Taylor, Adam P. Micolich y David Jonas, quienes publicaron en 1999 el artículo *Fractal Analysis of Pollock drip paintings*. Aunque resulta improbable que el artista fuera consciente de la estrecha relación de su trabajo con los fractales, los científicos lograron analizar la obra de Pollock con el poderoso lente matemático, midiendo la dimensión fractal en sus cuadros, lo que los llevó a la invención de un método para validar la autenticidad de los cuadros del artista.

Number 1 (Lavender Mist) J. Pollock
Figura 1.16
https://www.wikiart.org/es/jackson-pollock/number-1-lavender-mist-1950-1

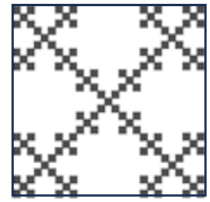
7.1 Es un argumento convincente del porqué en la pintura Lavender Mist de Pollock está presente el concepto de fractalidad:

A) tiene una estructura aleatoria, lo que significa que cualquier parte de la pintura será diferente a cualquier otra que se tome
B) tiene una estructura congruente, lo que significa que cualquier parte de la pintura será idéntica a cualquier otra que se tome
C) tiene una estructura infinita, lo que significa que si se intercambian dos fracciones de la pintura, no se alterará su composición general
D) tiene una estructura que se repite a diferentes escalas, lo que significa que si se amplía una parte de la pintura, se reconocerá un patrón similar al de la pintura completa.

Solución: La característica principal de un fractal es la autosimilitud, y aunque no está nombrada en alguno de los incisos, su descripción corresponde al inciso D. Respuesta correcta: **D) tiene una estructura que se repite a diferentes escalas, lo que significa que si se amplía una parte de la pintura, se reconocerá un patrón similar al de la pintura completa.**

Situación 8. Caja Fractal en las losetas para piso

Debido al éxito que tuvo Mariana en el proyecto para diseñar frisos para la contrahuella de escaleras (Situación 5), al poco tiempo fue contactada por el Museo de Tecnología y Ciencia (MUTEC), ahora para diseñar una loseta inspirada en un fractal y que cubrirá el piso de la Sala de Geometría. Cada pieza deberá ser un cuadrado de 27 cm de lado, sobre la cual se imprimirá con técnica láser, el diseño de la artista. El proyecto que presentó Mariana lo llamó “Caja Fractal-E4”, mostrado en la última columna de la tabla. En esta se indica el proceso que la llevó a su propuesta final:

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
			

Para que el proyecto sea aprobado, deberá ser sometido a un estudio en el que se realizará un presupuesto sobre los costos basado en los materiales, mano de obra y otros gastos de producción. Para este fin, Mariana debe analizar algunas características geométricas en su diseño.

8.1 Es el número de cuadrados que conforman el diseño *Caja Fractal-E4*:

A) 25
B) 27
C) 81
D) 125

8.2 Es la longitud de los cuadrados que conforman el diseño *Caja Fractal-E4*:

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{1}{18}$
D) $\frac{1}{27}$

8.3 Es el perímetro del diseño *Caja Fractal-E4*:

A) $5^3\left(\frac{4}{3^3}\right)$
B) $5^2\left(\frac{4}{3^2}\right)$
C) $3^3\left(\frac{4}{5^3}\right)$
D) $3^2\left(\frac{4}{5^2}\right)$

8.4 Es el área de cada cuadrado del diseño *Caja Fractal-E4*:

A) $\frac{1}{3^5}$

B) $\frac{1}{3^6}$

C) $\frac{5}{3^3}$

D) $\frac{5}{3^4}$

8.5 Es el área total del diseño *Caja Fractal-E4*:

A) $5^3\left(\frac{1}{3^4}\right)$

B) $5^3\left(\frac{1}{3^5}\right)$

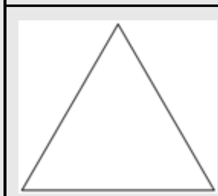
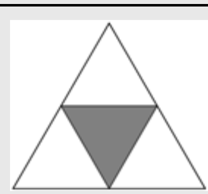
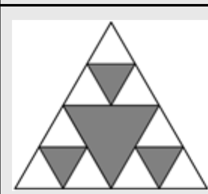
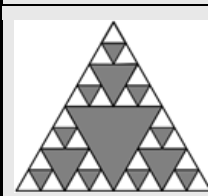
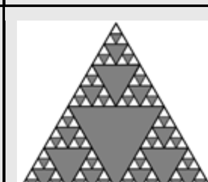
C) $5^3\left(\frac{1}{3^6}\right)$

D) $5^3\left(\frac{1}{3^7}\right)$

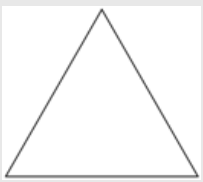
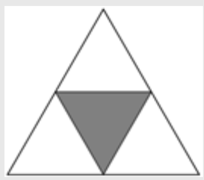
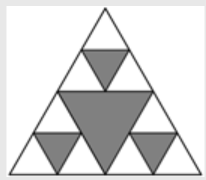
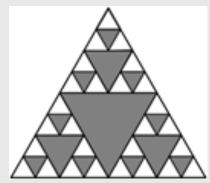
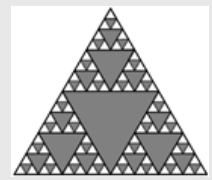
En las figuras que tienen estructura fractal es de particular interés descubrir las generalizaciones para determinar perímetros, áreas y otros elementos importantes. Estos **patrones numéricos y algebraicos** se pueden organizar en tablas que permitan organizar la información, visualizar las regularidades para finalmente estar en condiciones de generalizar los resultados.

Como ejemplo se analizará el Triángulo de Sierpinski, que consideraremos como la figura conformada por los triángulos blancos. Asimismo, supondremos que el triángulo de la etapa 1 es equilátero y que sus lados miden 2 u.

Si planteamos la pregunta ¿cuántos triángulos blancos forman el Triángulo de Sierpinski en la etapa *n*? se puede comenzar con una tabla en la que iremos organizando la información:

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5
				
1	3	9	27	

Contar los triángulos blancos de la etapa 5 parece ser imposible, pero si escribimos de una forma conveniente los resultados anteriores, puede observarse que:

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5
				
$1=3^0$	$3=3^1$	$9=3^2$	$27=3^3$	

Por lo que hemos hallado un patrón numérico que nos permite, sin contar, asegurar que el número de triángulos en la etapa 5 será de 3^4 triángulos. Más aún, el número de triángulos blancos en la etapa *n* será de 3^{n-1} .

Solución:

Para responder las preguntas 8.1 a 8.5, nos auxiliaremos de una tabla que nos permitirá organizar la información para generalizar resultados.

Etapa		Número de cuadrados	Longitud del lado del cuadrado	Perímetro de cada cuadrado	Perímetro Total	Área de cada cuadrado	Área total
1		5^0	$\frac{1}{3^0}$	$\frac{2^2}{3^0}$	$5^0\left(\frac{4}{3^0}\right)$	$\frac{1}{3^0}$	$5^0\left(\frac{1}{3^0}\right)$
2		5^1	$\frac{1}{3^1}$	$\frac{2^2}{3^1}$	$5^1\left(\frac{4}{3^1}\right)$	$\frac{1}{3^2}$	$5^1\left(\frac{1}{3^2}\right)$
3		5^2	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{2^2}{3^2}$	$5^2\left(\frac{4}{3^2}\right)$	$\frac{1}{3^4}$	$5^2\left(\frac{1}{3^4}\right)$
4		5^3	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{2^2}{3^3}$	$5^3\left(\frac{4}{3^3}\right)$	$\frac{1}{3^6}$	$5^3\left(\frac{1}{3^6}\right)$
5		5^4	$\frac{1}{3^4}$	$\frac{2^2}{3^4}$	$5^4\left(\frac{4}{3^4}\right)$	$\frac{1}{3^8}$	$5^4\left(\frac{1}{3^8}\right)$
6		5^5	$\frac{1}{3^5}$	$\frac{2^2}{3^5}$	$5^5\left(\frac{4}{3^5}\right)$	$\frac{1}{3^{10}}$	$5^5\left(\frac{1}{3^{10}}\right)$
. . .							
n		5^{n-1}	$\frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{4}{3^{n-1}}$	$5^{n-1}\left(\frac{4}{3^{n-1}}\right)$	$\frac{1}{3^{2(n-1)}}$	$5^{n-1}\left(\frac{1}{3^{2(n-1)}}\right)$

Por lo que las respuestas son 8.1 D, 8.2 D, 8.3 A, 8.4 B y 8.5 C

Situación 9. Arquitectura modular

La arquitectura modular trata sobre diseños conformados por bloques separados, son creados sistemáticamente y al conectarse o unirse entre sí forman una unidad habitable. Presenta una serie de características y ventajas: la construcción es más rápida que la obra tradicional *in situ*, dura entre tres a cuatro meses dependiendo

de las dimensiones; se reduce el uso de materiales y se minimiza el gasto energético en su fabricación al ser construida en interiores; son más ecológicas y menos perjudiciales para el medio ambiente, ya que están hechas con materiales reciclados y renovables.
En el año 1970 el arquitecto Kisho Kurokawa construyó en la ciudad de Tokio la Torre Cápsula de Nakagin. Fue el primer edificio modular en cimentarse, la unidad es una cápsula de concreto de 2.3 m x 3.8 m x 2.1 m con una ventana circular, es un espacio para vivir o trabajar, y la unión entre los módulos es vertical distribuidos en 13 pisos. Actualmente se encuentra degradado debido a variaciones climáticas y fallas de los equipos. Los desarrolladores amenazan con demolerlo para recuperar el terreno.

Figura 1.17 Torre Cápsula de Nakagin
https://www.archdaily.com/616907/spotlight-kisho-kurokawa/58e7ada3e58ecebb93000111-spotlight-kisho-kurokawa-photo

El primer acercamiento de Kisho con la arquitectura modular sucedió en la infancia: un día jugaba con su hermana con bloques de construcción, unían módulos con forma cúbica, su padre los miraba y dijo que le parecía una composición interesante, empezó a dibujar y a tomar apuntes. Por supuesto que a su edad no imaginaba que en el futuro desarrollaría el concepto de módulo usando elementos repetitivos, de forma, tamaño y funciones similares para proyectar su obra más famosa.

9.1 El siguiente módulo multicubos representa una sección de la Torre Cápsula de Nakagin. Si el edificio puede apreciarse desde los cuatro puntos cardinales y la vista superior, ¿cuántos cubos tienen dos caras visibles?

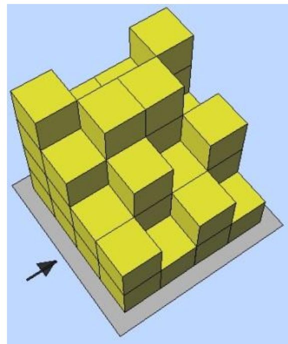


Figura 1.18 Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14

Respuesta correcta: **C) 13**

9.2 ¿Cuántos cubos tienen una cara visible?

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14

Respuesta correcta: **B) 12**

9.3 ¿Cuántos cubos se necesitaron para construir el módulo?

A) 40
B) 41
C) 43
D) 44

Respuesta correcta: **C) 43**

9.4 Desde todas las perspectivas, ¿cuántos cubos no se ven?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8

Respuesta correcta: **C) 7**

Situación 10. Módulo multicubos

El siguiente módulo se generó con cubos. La flecha que aparece en la imagen indica que la vista frontal debe contemplarse desde esa perspectiva, siempre será la referencia para considerar las vistas superiores, inferiores, laterales y posteriores.

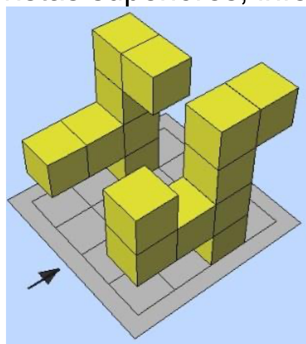
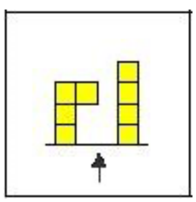
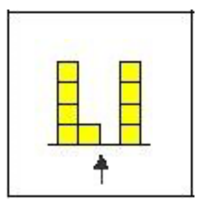
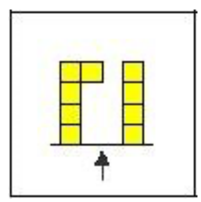


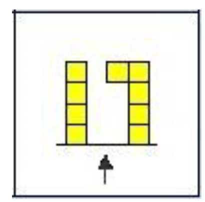
Figura 1.19 Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

10.1 ¿Cuál es la vista frontal del módulo?

A)


B)


C)


D)


Solución:

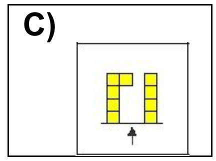
Para vincular un sólido con alguna de sus vistas, es importarte tener como punto de referencia la vista frontal que en esta sección estará indicada con una flecha. Las situaciones que implican ejercicios con los módulos multicubos requieren de una ubicación y orientación en el espacio de tal forma que en el pensamiento puedan visualizarse, relacionarse y representarse mentalmente los objetos en dos y tres dimensiones a la vez.

En la figura 1.19, desde la perspectiva frontal, se observan dos “torres” que tienen la misma altura, es decir, cada una tiene cuatro cubos apilados, así se puede descartar el inciso A.

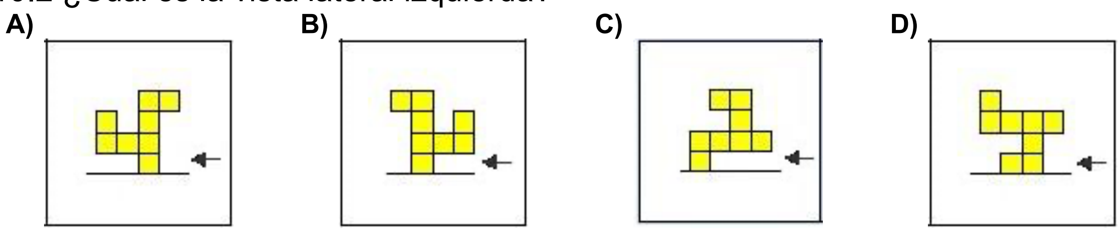
En la primera torre, a la izquierda, en el primer nivel, se encuentran alineados tres cubos, que contemplados desde la vista frontal, se perciben como uno solo, y en el tercer nivel, hasta arriba, se distinguen dos cubos. En su conjunto parece una “L” invertida. Así se descarta el inciso B.

En la torre de la derecha, en los niveles primero, segundo y tercero se encuentran alineados tres, dos y dos cubos, respectivamente, que también se aprecian como si fueran uno solo en cada nivel, es decir, la torre se visualiza como una pila de cuatro cubos. Con estas relaciones queda descartado el inciso D. Por lo tanto, la vista frontal del módulo de la figura 1.19 es la del inciso C.

Respuesta correcta:



10.2 ¿Cuál es la vista lateral izquierda?



Solución:

Desde la vista frontal, sin perder la referencia de la flecha, debe imaginarse que el sólido se gira hacia la derecha para observar la vista izquierda.

Otros elementos que pueden facilitar la orientación son:

- La base cuadriculada en la que se encuentra fijo el módulo. En este caso se trata de una cuadrícula de cuatro por cuatro.

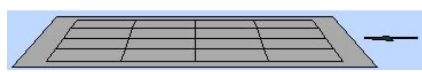


Figura 1.20

- Concebir como "planos" perpendiculares a la cuadrícula, a cada una de las filas de la rejilla, es decir, imaginar que al sólido multicubos se le está cortando por "rebanadas" pasando por las uniones de las caras de los cubos, y referirse a ellas como primer plano, segundo plano, etcétera, de delante hacia atrás.

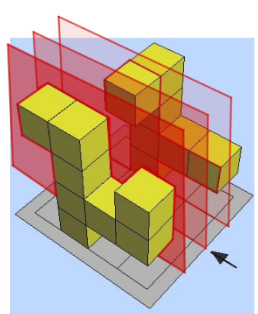


Figura 1.21 Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

Así, de izquierda a derecha, en el primer plano y en el tercer nivel, se aprecia un cubo. En el segundo lugar una torre de cuatro cubos apilados oculta el cubo que está en el tercer nivel en el tercer plano, y oculta también una torre de cuatro cubos en el cuarto plano. En el tercer lugar un cubo en el primer nivel oculta otro cubo ubicado en la misma dirección en el cuarto plano. En el cuarto lugar un cubo está en el segundo nivel; y otro cubo en el primer nivel alineado con uno que se localiza en el cuarto plano. La intención de hacer este análisis es ejemplificar cómo debe visualizarse y relacionarse la segunda dimensión con la tercera, y viceversa.

- Localizar cada cubo en el espacio con coordenadas cartesianas. Otra manera de ubicar los cubos del módulo es considerándolos como puntos en el espacio. Si se quiere hacer referencia a que, *de izquierda a derecha, en el primer lugar en el primer plano y en el tercer nivel, se encuentra un cubo*, la coordenada de ese cubo (lugar, plano, nivel) es equivalente a (frente, fondo, altura), y como coordenada del punto se escribe (1, 1, 3). Tómese como referencia la numeración de la cuadrícula.

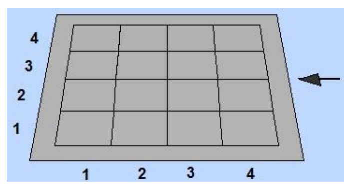


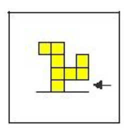
Figura 1.22

Al observarse que en el primer lugar en el primer plano y el tercer nivel sólo existe un cubo, quedan descartadas las opciones A, C y D.

Por lo tanto, la vista lateral izquierda del módulo multicubos de la figura 1.19 es la del inciso B.

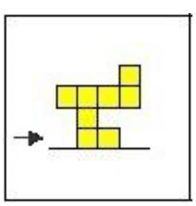
Respuesta correcta:

B)

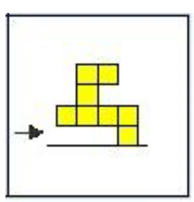


10.3 ¿Cuál es la vista lateral derecha?

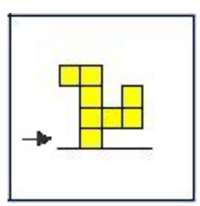
A)



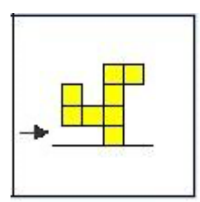
B)



C)

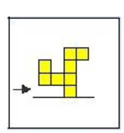


D)



Respuesta correcta:

D)



Situación 11. Módulo multicubos

Las tres imágenes siguientes representan la vista aérea, frontal y lateral derecha, respectivamente, de un módulo multicubos. La flecha indica que la vista frontal debe considerarse desde esa perspectiva.

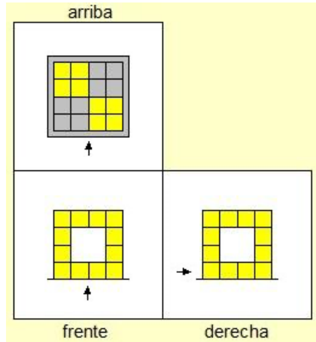
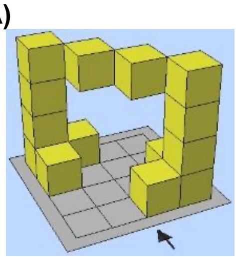


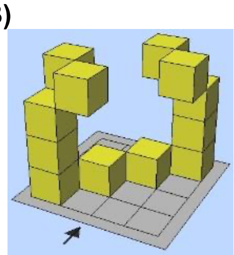
Figura 1.23 Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

11.1 Si se estima el menor número de cubos suficientes para la construcción del multicubos, ¿cuál de los siguientes módulos está vinculado con las representaciones de la figura 1.23?

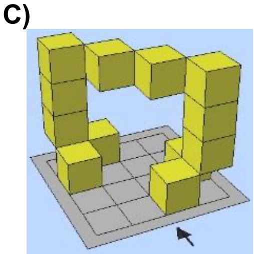
A)



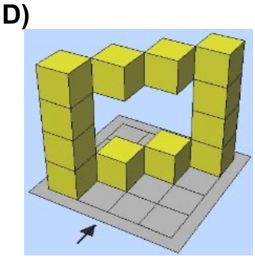
B)



C)

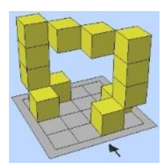


D)



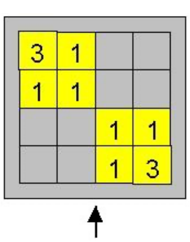
Respuesta correcta:

C)

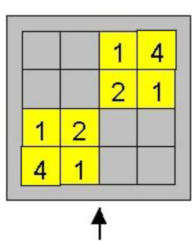


11.2 Los números en la cuadrícula representan la cantidad de cubos que forman las columnas de un módulo específico. ¿Cuál es la mejor representación para el módulo cuya vista aérea, frontal y lateral izquierda corresponden a las mostradas en la figura 1.23?

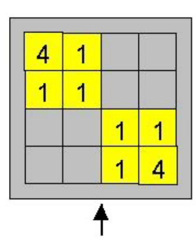
A)



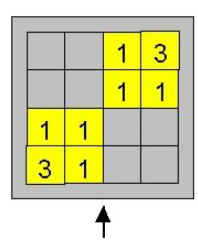
B)



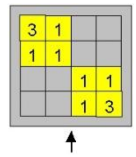
C)



D)



Respuesta correcta: **A)**



Solución:

Cuando no se tiene la habilidad de dibujar para representar un multicubos en tercera dimensión y se conocen las vistas frontales, laterales, aéreas o posteriores, una opción es escribir el número de cubos que conforman cada columna del módulo en la casilla correspondiente de la cuadrícula. Es así que se vincula la representación en el plano con la representación en el espacio.

Situación 12. Módulo multicubos

Las tres imágenes representan la vista aérea, frontal y lateral derecha de un módulo multicubos. La flecha indica que la vista frontal debe contemplarse desde esa perspectiva.

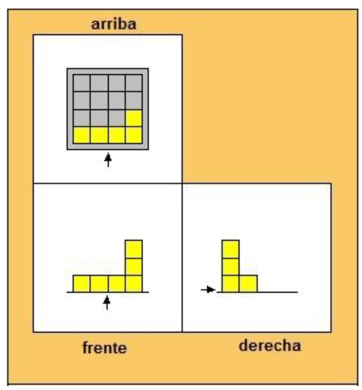
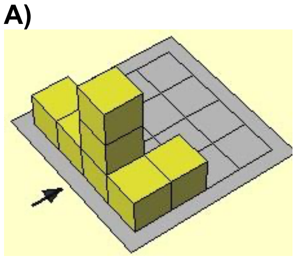


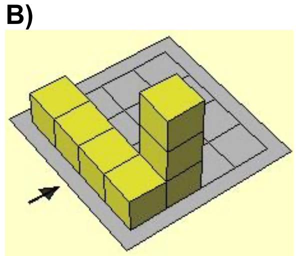
Figura 1.24 Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

12.1 ¿Cuál es la mejor representación volumétrica si se considera el menor número de cubos para construirlo?

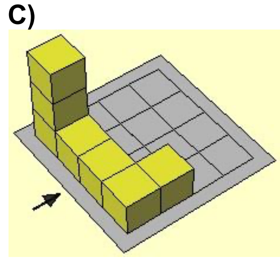
A)



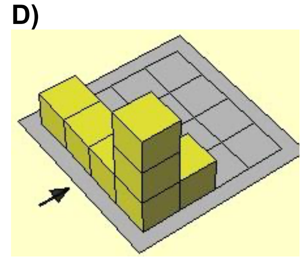
B)



C)



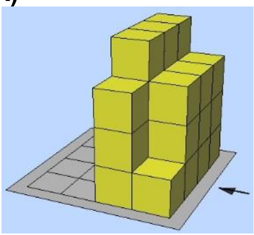
D)



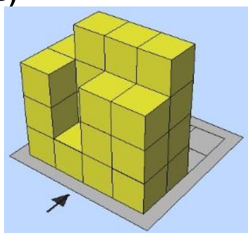
Respuesta correcta: **D)**

12.2 Se quiere construir el complemento del sólido que representan las tres vistas de la figura 1.24, de tal forma que se genere un módulo multicubos de 4x4x2 ¿Cuál de las siguientes opciones es la sección que falta?

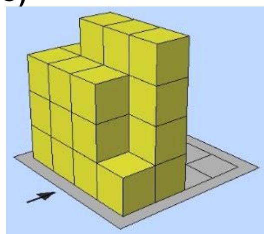
A)



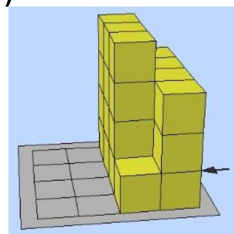
B)



C)

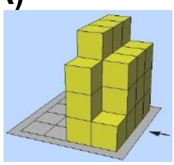


D)



Respuesta correcta:

A)



ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 13. Pintura a escala

Como proyecto de fin de semestre en la escuela de Artes, Gina deberá reproducir en un muro una ampliación de la siguiente pintura que se realizó en un lienzo cuyas dimensiones reales son 90 cm X 60 cm. Ella requiere ampliar quince veces más la pintura.

Figura 1.25 Fotografía de pintura al acrílico de estudiante de artes visuales

13.1 ¿Qué escala empleará Gina?

A) $60:1$

B) $60:1$

C) $15:1$

D) $1:15$

13.2 ¿Cuál debe ser la longitud, en metros, de la base del muro requerido?

A) 1350

B) 900

C) 13.5

D) 9

13.3 ¿Cuál es la razón del área de la pintura original con respecto al área de la superficie en que en que se reproducirá la pintura original?

A) $1/15$

B) $1/225$

C) $1/30$

D) $1/3375$

Situación 14. La ventana dorada

Se dice que en la casa de Jerzy Kocik, profesor de física y matemáticas en la Universidad del Sur de Illinoisse, puede encontrarse un diseño que se conoce como la ventana dorada. Observa los datos que se proporcionan en la Figura 1.26 y responde las preguntas.

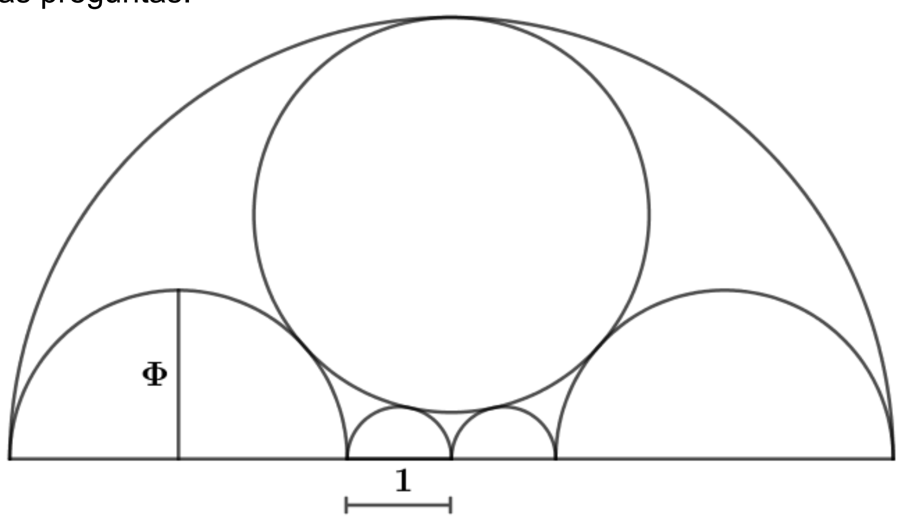


Figura 1.26 Reproducción realizada en GeoGebra (Sánchez, L.)

14.1 El radio del semicírculo mayor es:

A) $\phi + 1$

B) $\phi^2 - \phi$

C) ϕ^3

D) ϕ^4

14.2 Es la razón del área del semicírculo mayor, entre el área del semicírculo de radio ϕ:

A) ϕ

B) $\pi \phi^2$

C) $\pi \phi^3$

D) ϕ^4

Situación 15. Mosaicos

15.1 Las transformaciones que se aplicaron para generar el siguiente mosaico, son:

Figura 1.27 Reproducción basada en mosaico de Escher

A) Simetría con deslizamiento
B) Giros de 180°
C) Simetrías verticales
D) Simetrías y giros de 90°

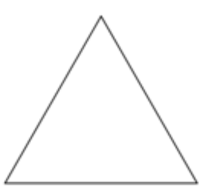
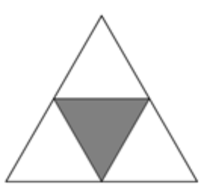
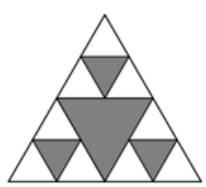
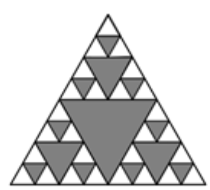
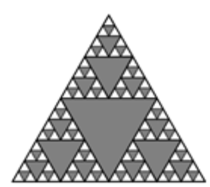
15.2 Las transformaciones que se aplicaron para generar el siguiente mosaico, son (realiza tu análisis utilizando la figura lila):

Figura 1.28 Reproducción basada en mosaico de Escher

A) Giros de 120° y traslaciones
B) Giros de 60° y traslaciones
C) Giros de 120° y simetrías con deslizamiento
D) Giros de 120° y simetrías horizontales

Situación 16. Triángulo de Sierpinski

A continuación, se ilustran las etapas del proceso para generar el fractal conocido como el “Triángulo de Sierpinski”. En las figuras esta región está formada por los triángulos blancos. Considera que el lado del triángulo equilátero inicial mide dos unidades.

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5
				
1	3	9	27	

16.1 Es la expresión para determinar el número de triángulos blancos en la Etapa n:
A) 3^{n-1}
B) $3n$
C) $3^n - 1$
D) $3(n-1) - 1$

16.2 El perímetro de cada triángulo blanco de la Etapa 3 es igual a:

A) 1/2
B) 3/2
C) 1
D) 3

16.3 Es la expresión para determinar el perímetro de cada triángulo blanco en la Etapa n:
A) $3^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
C) $3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

16.4 Es el valor del perímetro total del Triángulo de Sierpinski de la Etapa n:

A) $\frac{3}{2^{n-2}}$
B) $\frac{3^n}{2^{n-2}}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2^{2n-1}}$
D) $\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

16.5 Es la altura de un triángulo blanco de la Etapa 2:
A) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\sqrt{3}$

16.6 Es la altura de un triángulo blanco en la Etapa n:

A) $3 \cdot 2^{n-1}$

B) $\frac{1}{2^{n-2}}$

C) $\frac{2^{n-1}}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2^{n-1}}$

16.7 Es el área de un triángulo blanco de la Etapa 3:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2^4}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2^2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2^6}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2^8}$

16.8 Es el área total del triángulo de Sierpinski en la Etapa 3:

A) $\sqrt{3}$

B) $\frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^2}$

C) $\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2^4}$

D) $\frac{3^{\frac{7}{2}}}{2^6}$

16.9 Es el área total del triángulo de Sierpinski en la Etapa n:

A) $\frac{3^n}{2^{2n-\frac{1}{2}}}$

B) $\frac{3^n}{2^{2(n-1)}}$

C) $\frac{3^{n-\frac{1}{2}}}{2^{2n-1}}$

D) $\frac{3^{n-\frac{1}{2}}}{2^{2(n-1)}}$

Situación 17. Torre multicubos

Considera la torre de la figura 1.29. La flecha indica que la vista frontal debe contemplarse desde esa perspectiva, siempre será la referencia para considerar las vistas superiores, inferiores, laterales y posteriores.

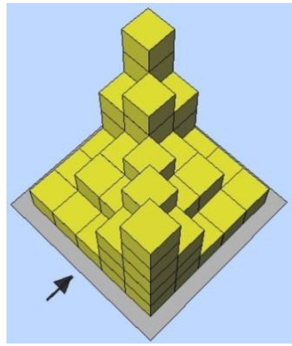


Figura 1.29
Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

17.1 ¿Cuántos cubos se requieren para construir el módulo?

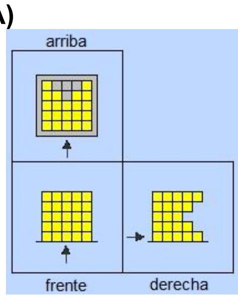
A) 37
B) 42
C) 47
D) 55

17.2 Si uno cubo puede estar suspendido, es decir, que no se requiere que haya cubos debajo de él para poder pertenecer a un nivel, ¿cuántos cubos restarías al módulo original de tal forma que quede hueco, no cambie su forma y se tenga el menor número de ellos?

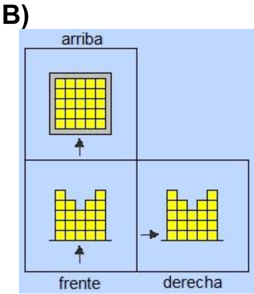
A) 9
B) 11
C) 12
D) 17

17.3 Elige la opción que representa las vistas aérea, frontal y lateral derecha, respectivamente, de la torre.

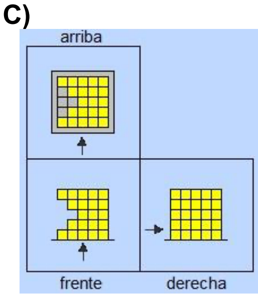
A)



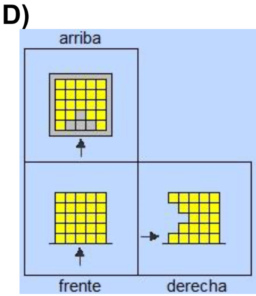
B)



C)



D)



17.4 Si el edificio puede apreciarse desde los cuatro puntos cardinales y la vista superior, ¿cuántos cubos tienen dos caras visibles?

A) 21
B) 22
C) 23
D) 24

Situación 18. Módulo multicubos I

Las tres imágenes siguientes representan la vista aérea, frontal y lateral derecha, respectivamente, de un módulo multicubos. La flecha indica que la vista frontal debe considerarse desde esa perspectiva.

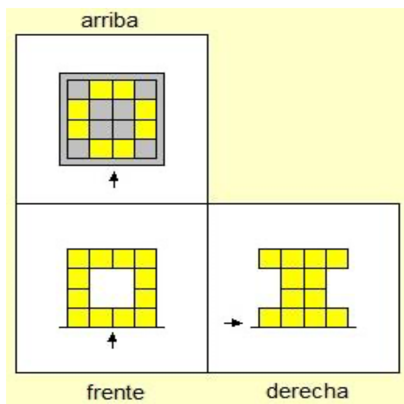
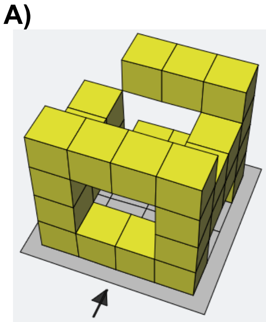
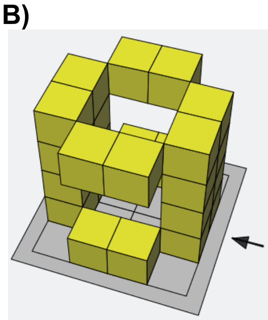
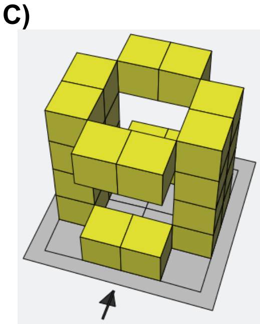


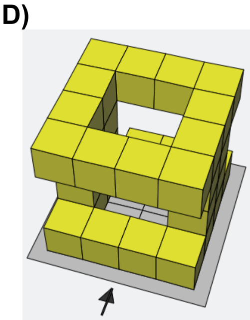
Figura 1.30
Construido con software de libre acceso en línea (Alvarado, C)

18.1 La mejor representación volumétrica que coincide con las tres perspectivas es

A)


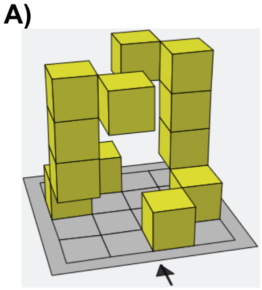
B)


C)


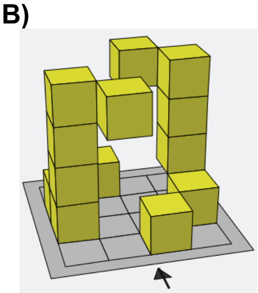
D)


18.2 Si se estima el menor número de cubos suficientes para la construcción de otro módulo con las perspectivas de la figura 1.30, ¿cuál de las siguientes es la mejor representación?

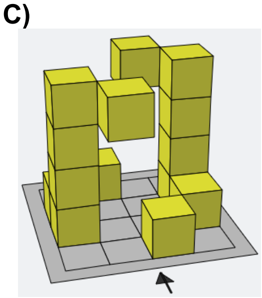
A)



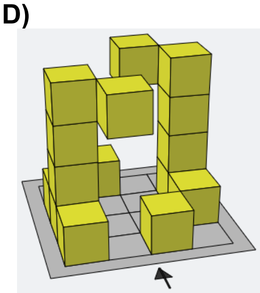
B)



C)



D)



Situación 19. Módulo multicubos II

A los módulos de las figuras 1.31 y 1.32 les faltan cubos para estar completos, se retiraron las hileras de extremo a extremo de acuerdo con lo que muestran las tres vistas (frontal, aérea y lateral derecha). La flecha indica que la vista frontal debe contemplarse desde esa perspectiva, siempre será la referencia para considerar las vistas superiores, inferiores, laterales y posteriores.

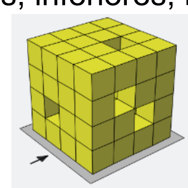


Figura 1.31

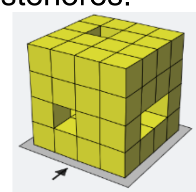


Figura 1.32

Construcciones con software de libre acceso en línea (Alvarado, C.)

19.1 ¿Cuántos cubos faltan para completar el módulo de la figura 1.31?

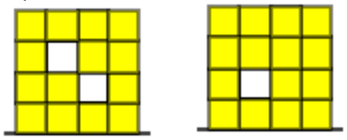
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

19.2 ¿Cuántos cubos faltan para completar el módulo de la figura 1.32?

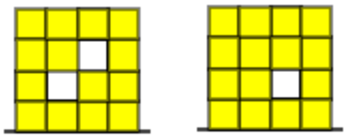
A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

19.3 Desde la perspectiva frontal, la vista lateral derecha y la vista posterior del módulo de la figura 1.31, respectivamente, son

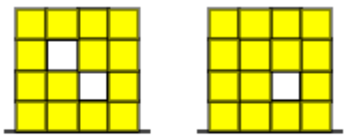
A)



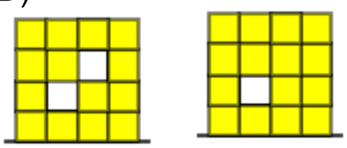
B)



C)

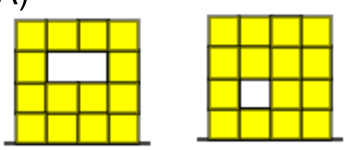


D)

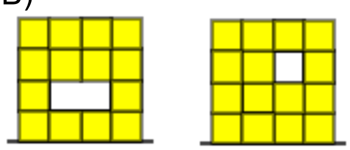


19.4 Desde la perspectiva frontal, la vista lateral izquierda y la vista aérea del módulo de la figura 1.32, respectivamente, son

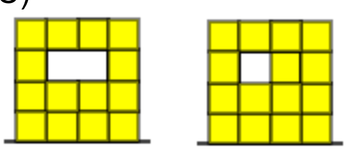
A)



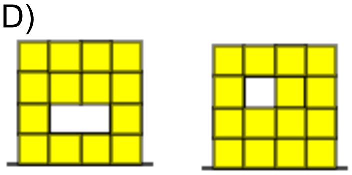
B)



C)



D)



UNIDAD 2. IDEAS NUMÉRICAS

Objetivos específicos

El alumno:

- Desarrollará habilidades de abstracción y comunicación oral, escrita y gráfica al contrastar el surgimiento de las ideas numéricas en algunas culturas de la antigüedad, para explicar el contexto histórico y los problemas matemáticos que dieron origen a algunas representaciones simbólicas vigentes en la actualidad.

- Desarrollará habilidades de razonamiento lógico y comunicación simbólica al trabajar con patrones numéricos y geométricos para acercarse a las ideas intuitivas y numéricas de las matemáticas.

Situación 1. El arte y la geometría de $\sqrt{2}$

Los artistas que más intensamente han utilizado las propiedades de la diagonal del cuadrado con fines estéticos son probablemente los del islam. Debido a que prohibiciones de orden religioso les impidieron desarrollar un arte figurativo, estos artistas se volcaron hacia concepciones abstractas basadas en motivos puramente geométricos, que se encuentran absolutamente por doquier en el mundo musulmán y en materiales muy diversos: tela, ladrillo, madera, cobre, papel, yeso y hasta vidrio. Aunque estamos acostumbrados a ver estos motivos dibujados sobre muchos edificios, se los encuentra también en alfombras, manuscritos, puertas, entre otros.

Mosaico arco cúpula medieval Arquitectura medieval
https://wallhere.com/es/wallpaper/892584
Figura 2.1

1.1 En la fotografía se observa la siguiente construcción geométrica:

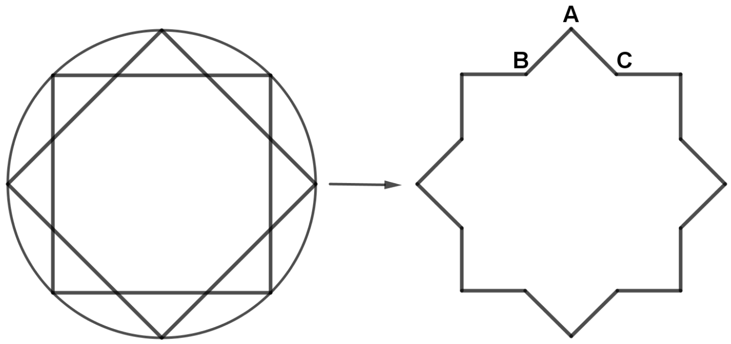


Figura 2.2

¿Cuál es el valor de la razón $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$?

A) $2\sqrt{2}$

B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\sqrt{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

La raíz cuadrada de 2 tiene la propiedad de ser un número irracional, su vínculo con la diagonal del cuadrado hace de $\sqrt{2}$ la duplicadora de las áreas (figura 3):

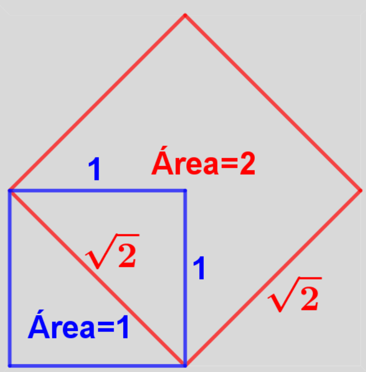


Figura 2.3

Por ser el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos unitarios, lo cual se comprueba aplicando el teorema de Pitágoras se le llama *constante pitagórica*.

Su valor aproximado en el sistema decimal y truncado a cincuenta decimales es:

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694...$$

Satisface la ecuación cuadrática con coeficientes racionales $x^2 = 2$

Tiene diversas aplicaciones prácticas, algunos ejemplos son:

- Es el promedio geométrico de 1 y de 2 lo cual interesa a los teóricos de la música, ya que la razón de frecuencias de la cuarta aumentada o quinta disminuida de la gama temperada vale $\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}$. La raíz duodécima de 2 se utiliza para montar el sistema musical temperado de doce notas por octava y también se usa para hallar las frecuencias de las notas y el largo de escala en instrumentos como la guitarra o el piano.
- Por ser el número igual al doble de su inverso $\sqrt{2} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, se aplica en los formatos de papel estandarizados (ISO216) que se utilizan cotidianamente en muchos países.
- La máxima tensión de la corriente alterna monofásica es igual a la $\sqrt{2}$ del valor eficaz indicado, que es generalmente de 110 o 220 voltios.
- La sucesión de valores de apertura del diafragma de las cámaras fotográficas son los valores aproximados de una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}$.
- Las alusiones a la raíz cuadrada de 2 que se encuentran en arquitectos del renacimiento como Andrea Palladio y Leon Battista Alberti, han hecho de ella una referencia privilegiada de los artistas.

Propiedades de un cuadrado

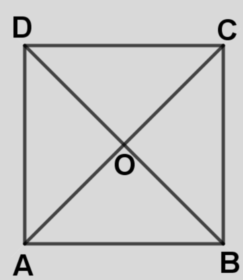


Figura 2.4

1. Los cuatro lados de un cuadrado tienen la misma longitud:
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$
2. Los cuatro ángulos interiores de un cuadrado son rectos:
$$\angle BAD = \angle CBA = \angle DCB = \angle ADC = 90^{o}$$
3. Los lados opuestos de un cuadrado son paralelos:
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$
4. La suma de los ángulos interiores de un cuadrado es igual a 360^{o}:
$$\angle BAD + \angle CBA + \angle DCB + \angle ADC = 360^{o}$$
5. Las dos diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí, tienen la misma longitud y se dividen mutuamente por la mitad:
$$\overline{AC} \perp \overline{BD}, \overline{AC} = \overline{BD} \text{ y } \overline{AO} = \overline{OC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \overline{BO} = \overline{OD} = \frac{\overline{BD}}{2}$$

6. Las diagonales dividen al cuadrado en triángulos rectángulos isósceles simétricos y congruentes:

$$\Delta ABC \cong \Delta ACD,\ \Delta ABO \cong \Delta BCO \cong \Delta CDO \cong \Delta DAO$$

7. Las diagonales son bisectrices de los ángulos interiores del cuadrado:

$$\angle BAC = \angle CAD = 45º,\ \angle DBA = \angle CBD = 45º,$$

$$\angle CAB = \angle DCA = 45º,\ \angle BDC = \angle ADB = 45º$$

8. El punto O (ver figura 5) de intersección de las diagonales se llama centro del cuadrado, y también es el centro de las circunferencias inscrita y circunscrita al cuadrado.

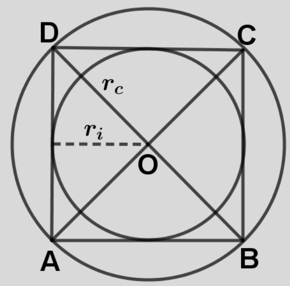


Figura 2.5

Definición:
La **circunferencia inscrita** es tangente a los lados del cuadrado y tiene su centro en la intersección de las diagonales.

Definición:
La **circunferencia circunscrita** contiene los vértices del cuadrado y tiene su centro en la intersección de las diagonales.

Definición:
Se llama **diagonal de un cuadrado** a cualquier segmento que une dos vértices de los ángulos interiores opuestos de un cuadrado.

Fórmulas de la longitud de las diagonales de un cuadrado

1. Fórmula de la longitud de una diagonal "d" de un cuadrado en función de su lado "a":

$$d = a\sqrt{2}$$

2. Fórmula de la longitud de una diagonal "d" de un cuadrado en función de su área "A":

$$d = \sqrt{2A}$$

3. Fórmula de la longitud de una diagonal "d" de un cuadrado en función de su perímetro "P":

$$d = \frac{\sqrt{2}}{4}P$$

4. Fórmula de la longitud de una diagonal "d" de un cuadrado en función del radio "r_i" de la circunferencia inscrita:

$$d = 2\sqrt{2}r_i$$

5. Fórmula de la longitud de una diagonal "d" de un cuadrado en función del radio "r_c"de la circunferencia circunscrita:

$$d = 2r_c$$

Solución:
Si se considera la siguiente figura:

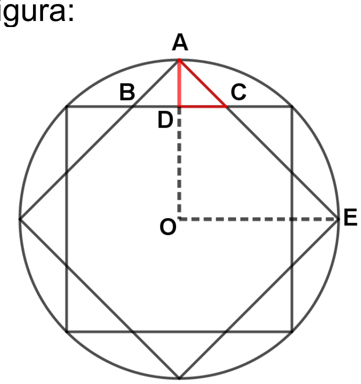


Figura 2.6

Si los dos cuadrados inscritos en la circunferencia tienen lados de longitud L, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo isósceles $\triangle AOE$ y despejando el lado $\overline{OA}$ se obtiene:

$$\left(\overline{OA}\right)^2 + \left(\overline{OE}\right)^2 = L^2 \text{, pero } \overline{OA} = \overline{OE} \text{, entonces:}$$

$$2\left(\overline{OA}\right)^2 = L^2$$

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{\frac{L^2}{2}}$$

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

Y como $\overline{OD} = \frac{L}{2}$, el valor de $\overline{AD}$ es:

$$\overline{AD} = \overline{OA} - \overline{OD}$$

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}L - \frac{L}{2}$$

$$\overline{AD} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L = \overline{DC}$$

Ahora se puede obtener la longitud del segmento $\overline{BC} = 2\left(\overline{DC}\right)$:

$$\overline{BC} = 2\left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L\right]$$

$$\overline{BC} = \left(\sqrt{2}-1\right)L---(1)$$

Aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo isósceles $\triangle ADC$, donde $\overline{AD} = \overline{DC}$:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2\left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L\right]^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L---(2)$$

Así que, sustituyendo (1) y (2):

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)L}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Y racionalizando el denominador:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \sqrt{2}$$

Respuesta correcta: **C)** $\sqrt{\mathbf{2}}$

1.2 En la fotografía (figura 2.1), también se observa la siguiente construcción geométrica:

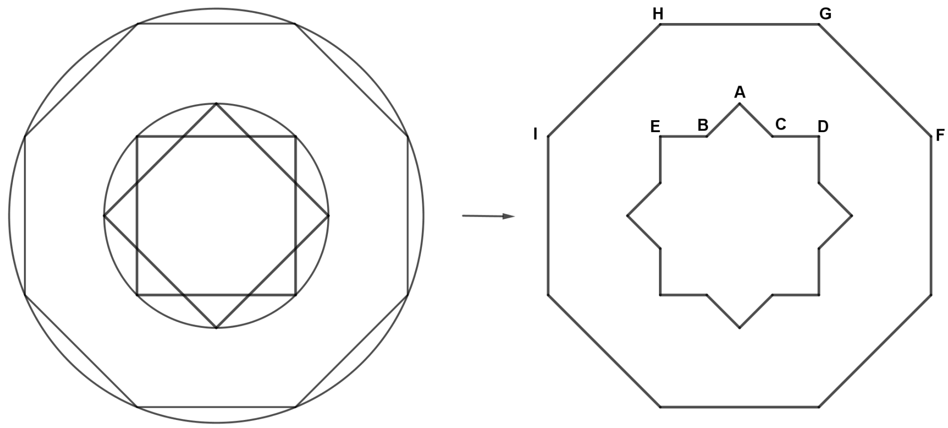


Figura 2.7

Considerando que la longitud de los lados de los cuadrados inscritos es L, la mínima distancia de la estrella al octágono es igual a:

A) $\dfrac{\sqrt{2}L}{4}$

B) $\dfrac{L}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{2}L}{2}$

D) $\dfrac{L}{4}$

Solución:

En la siguiente figura:

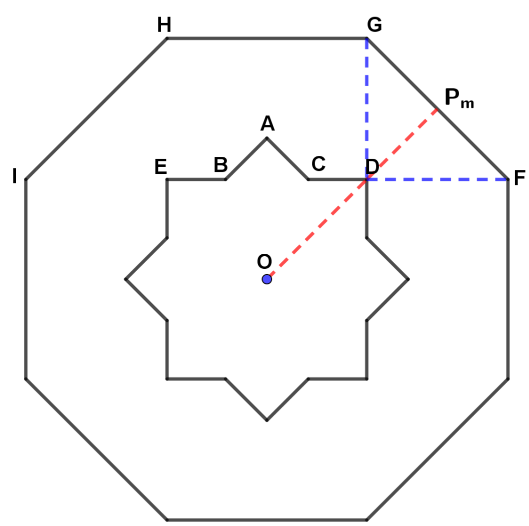


Figura 2.8

Se observa que la distancia mínima de la estrella al octágono se presenta de los picos de la estrella a los puntos medios de los lados del octágono en forma perpendicular, en la figura 2.8 es el segmento $\overline{DP_m}$. Este segmento además es bisectriz del ángulo recto $\measuredangle FDG$, y un cateto del triángulo rectángulo isósceles $\triangle DP_mG$. Por otra parte, el lado del octágono $\overline{FG} = L$, entonces $\overline{GP_m} = \frac{L}{2}$, y como $\overline{GP_m} = \overline{DP_m}$, entonces la mínima distancia de la estrella al octágono es $\frac{L}{2}$

Respuesta correcta: **B)** $\boldsymbol{\frac{L}{2}}$

1.3 Si el perímetro del octágono y el perímetro de la estrella de la figura 2.8 es P_o y P_e respectivamente, el valor de la razón $\frac{P_o}{P_e}$ es:

A) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$

B) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$

D) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

Solución:
Considerando nuevamente la figura 2.7, se observa que el perímetro del octágono regular es:

$$P_o = 8\overline{FG} = 8L$$

En el reactivo 1.1 se verificó que $\overline{AC} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L$, entonces el perímetro de la estrella es:

$$P_e = 16\overline{AC} = 16\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L\right] = 8\left(2-\sqrt{2}\right)L$$

Así que la razón $\frac{P_o}{P_e}$ es:

$$\frac{P_o}{P_e} = \frac{8L}{8\left(2-\sqrt{2}\right)L} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

Respuesta correcta: **A)** $\boldsymbol{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}$

1.4 En la figura 2.7, el valor del área comprendida entre la estrella y el octágono regular, en términos de la longitud L de los lados de los cuadrados que forman la estrella es:

A) $\left(4\sqrt{2}+2\right)L^2$

B) $\left(2\sqrt{2}-2\right)L^2$

C) $\left(4\sqrt{2}-2\right)L^2$

D) $\left(2\sqrt{2}+2\right)L^2$

Solución:
Considerando la siguiente figura:

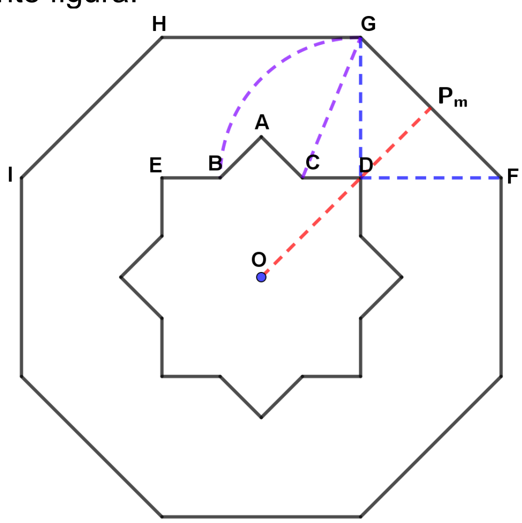


Figura 2.9

En el triángulo rectángulo isósceles $\triangle DP_mG$ de la figura 2.9, se cumple que $\overline{DP_m} = \overline{GP_m} = \dfrac{L}{2}$, así que aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$\overline{DG} = \sqrt{\left(\overline{DP_m}\right)^2 + \left(\overline{GP_m}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

Por otra parte se observa que $\overline{CD} = \overline{AC}$ y en el reactivo 1.1 se obtuvo el siguiente resultado $\overline{AC} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L$, entonces el área del triángulo $\triangle CDG$ es:

$$A_{\triangle CDG} = \frac{\left(\overline{CD}\right)\left(\overline{DG}\right)}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)L\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}L^2$$

Análogamente el área del triángulo $\triangle DFG$ es:

$$A_{\triangle DFG}=\frac{\left(\overline{FG}\right)\left(\overline{DP_m}\right)}{2}=\frac{L\left(\dfrac{L}{2}\right)}{2}=\frac{L^2}{4}$$

Así que el área comprendida entre la estrella y el octágono regular es:

$$A=16A_{\triangle CDG}+8A_{\triangle DFG}=16\left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}L^2\right)+8\left(\frac{L^2}{4}\right)=\left[4\left(\sqrt{2}-1\right)+2\right]L^2=\left(4\sqrt{2}-2\right)L^2$$

Respuesta correcta: **C)** $\left(\mathbf{4\sqrt{2}-2}\right)\boldsymbol{L^2}$

Situación 2. La huella de $\sqrt{2}$ en la arquitectura

Introduciendo cuadrados y círculos unos dentro de los otros también han servido a otros artistas para elaborar una escala de proporciones. Un ejemplo de este tipo de inclusiones se encuentra sobre la fachada del mausoleo de Ismael Samaní, construido hacia 907 en Bukhara, la actual Uzbekistán como muestra la siguiente fotografía.

Mausoleo de Ismael Samaní

https://it.wikipedia.org/wiki/Mausoleo_di_Ismail_Samani#/media/File:Samanid_Mausoleum_outside_detail_6.JPG

Figura 2.10

2.1 En la fotografía se observa la siguiente figura resaltada en color azul

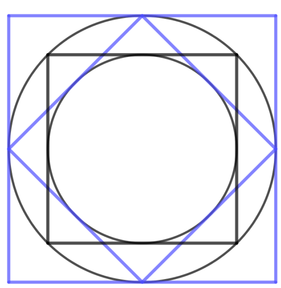


Figura 2.11

¿Cuál es la proporción del área del círculo mayor al área del círculo menor?

A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\sqrt{2}$

Solución:
En la figura 2.11 se puede observar que los dos cuadrados interiores son congruentes. Si se considera que la longitud de sus lados es $2r$, donde r es el radio del círculo menor, entonces el radio R del círculo mayor es un cateto del triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa igual a $2r$, de manera que aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene su longitud, como se muestra en la siguiente figura 2.12:

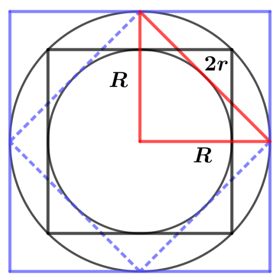


Figura 2.12

$$R^2 + R^2 = (2r)^2$$

$$2R^2 = 4r^2$$

$$R^2 = 2r^2$$

$$R = \sqrt{2}r$$

Al calcular las áreas de los círculos menor y mayor se obtiene:
Área del círculo menor $A_m = \pi r^2$; área del círculo mayor $A_M = \pi\left(\sqrt{2}r\right)^2 = 2\pi r^2$.

Entonces la proporción del área del círculo mayor al área del círculo menor es:

$$\frac{A_M}{A_m} = \frac{2\pi r^2}{\pi r^2} = 2$$

Respuesta correcta: **B) $\mathbf{2}$**

2.2 En la fotografía de la figura 2.10 se aprecia el patrón geométrico de la siguiente figura:

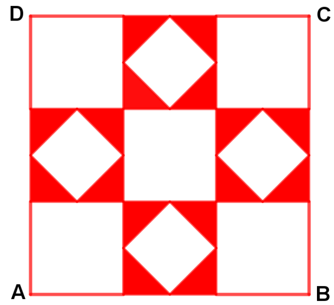


Figura 2.13

Si el cuadrado $\square ABCD$ tiene lados de longitud L el perímetro de la zona sombreada es:

A) $\dfrac{8\left(2-\sqrt{2}\right)L}{3}$

B) $\dfrac{16\left(2-\sqrt{2}\right)L}{3}$

C) $\dfrac{16\left(2+\sqrt{2}\right)L}{3}$

D) $\dfrac{8\left(2+\sqrt{2}\right)L}{3}$

Un patrón es una sucesión de símbolos de diversa naturaleza: numéricos, geométricos, entre otros, que se construyen siguiendo una regla o algoritmo ya sea de **repetición** o **recurrencia**. Los **patrones** de **repetición** son aquellos en los que sus diferentes elementos se presentan en forma periódica. Los **patrones** de **recurrencia** son aquellos en los que su estructura base cambia con regularidad, de manera que cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores de cuyo análisis se infiere una ley de formación.

Un ejemplo de patrón de repetición es:

$$0,1,0,1,0,1,01,\cdots$$

Un ejemplo de patrón de recurrencia es:

$2,2+4,2+4+6,2+4+6+8,\cdots$, lo que puede expresarse como $2,6,12,20,\cdots$

Los patrones se presentan en muy diversos entornos, por ejemplo: en la música, en las fases de la luna, en los paneles de las abejas, en una sinfonía, en los pasos de una danza, en el arte, en las conjugaciones verbales, en los algoritmos de las operaciones básicas, entre otros, y son sujetos de análisis y explicación.

Solución:
En la siguiente figura:

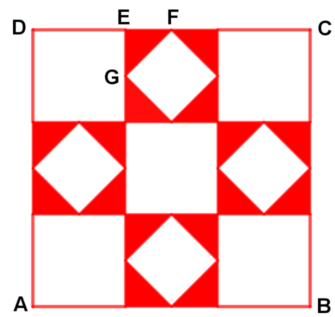


Figura 2.14

El segmento $\overline{EF} = \dfrac{L}{6}$, entonces aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo isósceles $\triangle EFG$ se obtiene la longitud del segmento $\overline{FG}$:

$$\overline{FG} = \sqrt{\left(\overline{EF}\right)^2 + \left(\overline{EG}\right)^2} \Rightarrow \overline{FG} = \sqrt{\left(\frac{L}{6}\right)^2 + \left(\frac{L}{6}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{L^2}{36}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6}L$$

Entonces el perímetro de la zona sombreada de la figura 2.14 atendiendo a su regularidad es:

$$P = 32\left(\overline{EF}\right) + 16\left(\overline{FG}\right) = 32\left(\frac{L}{6}\right) + 16\left(\frac{\sqrt{2}}{6}L\right) = 16\left(\frac{L}{3}\right) + 8\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)L$$

$$P = \frac{16L + 8\sqrt{2}L}{3} = \frac{8\left(2+\sqrt{2}\right)L}{3}$$

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{\dfrac{8\left(2+\sqrt{2}\right)L}{3}}$

2.3 En la figura 2.13 el área que no está sombreada en términos de la longitud L de los lados del cuadrado $\square ABCD$ es:

A) $\dfrac{7}{9}L^2$

B) $\dfrac{5}{9}L^2$

C) $\dfrac{4}{9}L^2$

D) $\dfrac{2}{9}L^2$

Solución:

En la figura 2.14 se observa que el área no sombreada está formada de cinco cuadrados de lados de longitud igual a $\frac{L}{3}$, y cuatro cuadrados de lados de longitud igual a $\frac{\sqrt{2}}{6}L$, por lo tanto su área es:

$$A = 5\left(\frac{L}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{6}L\right)^2 = \frac{5}{9}L^2 + \frac{2}{9}L^2 = \frac{7}{9}L^2$$

Respuesta correcta: **A)** $\boldsymbol{\frac{7}{9}L^2}$

2.4 En la fotografía de la figura 2.10 también se aprecia el patrón geométrico de la siguiente figura:

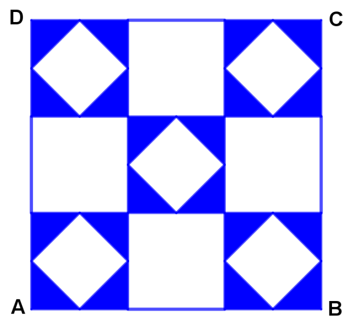


Figura 2.15

Si el perímetro de la zona azul es P_a, el perímetro de la zona blanca es P_b y el cuadrado $\square ABCD$ tiene lados de longitud L, entonces el valor de la razón $\frac{P_a}{P_b}$ es:

A) $\frac{5\left(-1-3\sqrt{2}\right)}{17}$

B) $\frac{5\left(1+3\sqrt{2}\right)}{17}$

C) $\frac{5\left(1-3\sqrt{2}\right)}{17}$

D) $\frac{5\left(-1+3\sqrt{2}\right)}{17}$

Solución:
Considerando la siguiente figura:

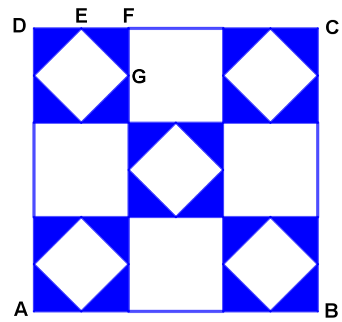


Figura 2.16

En el triángulo rectángulo isósceles $\triangle EFG$, la longitud de los catetos es $\overline{EF} = \overline{FG} = \frac{L}{6}$, y la longitud de la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras es:

$$\overline{EG} = \sqrt{\left(\overline{EF}\right)^2 + \left(\overline{FG}\right)^2} \Rightarrow \overline{EG} = \sqrt{\left(\frac{L}{6}\right)^2 + \left(\frac{L}{6}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{L^2}{36}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6}L$$

Entonces el perímetro de la zona azul es:

$$P_a = 40\left(\frac{L}{6}\right) + 20\left(\frac{\sqrt{2}}{6}L\right) = \frac{20}{3}L + \frac{10\sqrt{2}}{3}L = \frac{10\left(2+\sqrt{2}\right)}{3}L$$

Ahora el perímetro de la zona blanca es:

$$P_b = 16\left(\frac{L}{6}\right) + 20\left(\frac{\sqrt{2}}{6}L\right) = \frac{8}{3}L + \frac{10\sqrt{2}}{3}L = \frac{2\left(4+5\sqrt{2}\right)}{3}L$$

Así que la razón $\frac{P_a}{P_b}$ es:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\frac{10\left(2+\sqrt{2}\right)}{3}L}{\frac{2\left(4+5\sqrt{2}\right)}{3}L} = \frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)}{4+5\sqrt{2}} = \frac{5\left(2+\sqrt{2}\right)\left(4-5\sqrt{2}\right)}{\left(4+5\sqrt{2}\right)\left(4-5\sqrt{2}\right)} = \frac{5\left(1+3\sqrt{2}\right)}{17}$$

Respuesta correcta: **B)** $\boldsymbol{\frac{5\left(1+3\sqrt{2}\right)}{17}}$

Situación 3. ¿Cómo no ver $\sqrt{2}$ por todas partes?

Para dimensionar los elementos básicos necesarios para la realización de un mosaico geométrico concebido sobre un sistema de proporciones, los artesanos del mundo musulmán aprovechan algunas construcciones simples para las cuales no necesitan conocimientos profundos de geometría. En particular utilizan un motivo base que puede repetirse al infinito para ornamentar una puerta, una alfombra u otro objeto.

En las siguientes fotografías se muestran mosaicos medievales ornamentales:

Ornamentos orientales medievales sin costuras
https://sp.depositphotos.com/94356784/stock-illustration-stylized-medieval-mosaic.html
Figura 2.17

3.1 La figura 2.18 es el motivo base que puede repetirse infinidad de veces para ornamentar un mosaico medieval como los mostrados en las fotografías de la figura 2.17:

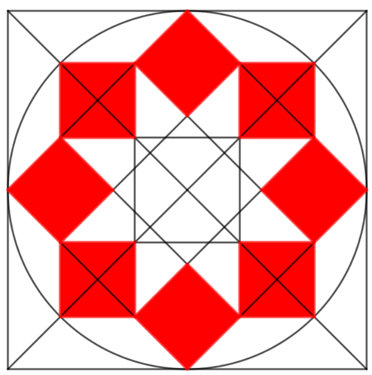


Figura 2.18

Si el radio de la circunferencia que se muestra es r, entonces la longitud de los lados de los cuadrados rojos que tienen la misma área es igual a:

A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}r$

B) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}r$

C) $\left(\sqrt{2}-1\right)r$

D) $\left(\sqrt{2}+1\right)r$

Solución:
En la figura 2.17 se puede observar que los dos cuadrados inscritos en la circunferencia son congruentes. Si se considera que el radio de la circunferencia es r, entonces la longitud de los lados de estos cuadrados se puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura 2.19:

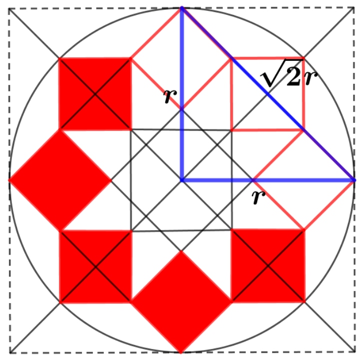


Figura 2.19

$$(lado)^2 = r^2 + r^2$$

$$(lado)^2 = 2r^2$$

$$(lado) = \sqrt{2}r$$

Ahora si se considera que los cuadrados rojos tienen longitud "a", entonces como se observa en la figura 2.20, el lado de los cuadrados inscritos también tiene longitud igual a dos veces la longitud de un cuadrado rojo más la longitud de su diagonal, y esta se obtiene nuevamente aplicando el teorema de Pitágoras:

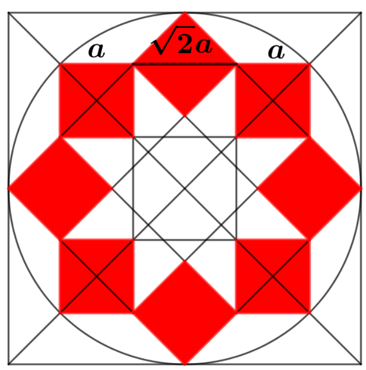


Figura 2.20

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2}a$$

Así que el lado de los cuadrados inscritos en la circunferencia también tiene longitud $lado = 2a + \sqrt{2}a$.

Entonces el lado "a" de los cuadrados rojos en función del radio r de la circunferencia se obtiene igualando las dos expresiones que definen el lado de los cuadrados inscritos en la circunferencia:

$$2a+\sqrt{2}a=\sqrt{2}r$$

$$\left(2+\sqrt{2}\right)a=\sqrt{2}r$$

$$a=\frac{\sqrt{2}r}{2+\sqrt{2}}$$

Y racionalizando el denominador se obtiene:

$$a=\left(\frac{\sqrt{2}r}{2+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$$

$$a=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}r}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$a=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}r}{2}$$

$$a=\frac{\left(2\sqrt{2}-2\right)r}{2}$$

$$a=\left(\sqrt{2}-1\right)r$$

Respuesta correcta: **C)** $\left(\sqrt{2}-1\right)r$

3.2 Considerando nuevamente el motivo base (figura 2.18) que puede repetirse infinidad de veces para ornamentar un mosaico medieval como los mostrados en las fotografías de la figura 2.17:

3.3

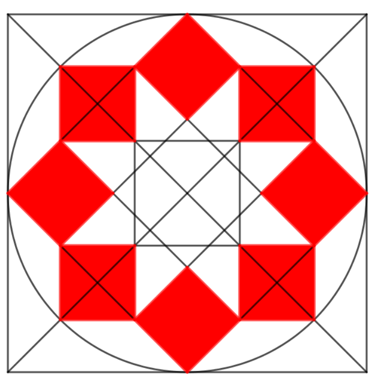


Figura 2.18

Si el radio de la circunferencia que se muestra es r, el área blanca comprendida entre el perímetro del círculo y el perímetro externo que forman los cuadrados rojos es:

A) $A = \left[2\pi - \left(23 - 4\sqrt{2}\right)\right]r^2$

B) $A = \left[2\pi - \left(23 + 4\sqrt{2}\right)\right]r^2$

C) $A = \left[\pi - \left(23 - 4\sqrt{2}\right)\right]r^2$

D) $A = \left[\pi - 2\left(23 - 4\sqrt{2}\right)\right]r^2$

Los patrones se presentan en diferentes contextos y dominios de las matemáticas: numérico, geométrico, métrico, entre otros. Los patrones además permiten la interpretación de regularidades presentes en diversas situaciones de la vida diaria, por tanto su reconocimiento es fundamental en el análisis de estas situaciones.

Solución:
Se debe recordar del reactivo 3.1, que los lados de los cuadrados rojos tienen longitud $a = \left(\sqrt{2} - 1\right)r$. Entonces el área buscada se obtiene restando del área del círculo, la suma de las áreas de uno de los cuadrados inscritos en dicho círculo (de color verde), y de cuatro mitades de cuadrados rojos, ver la figura 2.21:

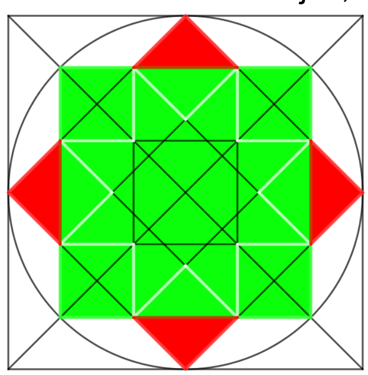


Figura 2.21

También del reactivo 3.1, se sabe que los lados de los cuadrados inscritos en el círculo tienen la siguiente longitud:

$$2a + \sqrt{2}a = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)r + \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)r = \left(2 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)r$$

Así que el área A que se pide es:

$$A = \pi r^2 - \left\{\left[\left(2 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)r\right]^2 + 2\left[\left(\sqrt{2} - 1\right)r\right]^2\right\} = \pi r^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 r^2\left[\left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + 2\right]$$

Y simplificando se obtiene:

$$A = \pi r^2 - 2\left(23 - 4\sqrt{2}\right)r^2 = \left[\pi - 2\left(23 - 4\sqrt{2}\right)\right]r^2$$

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{A = \left[\pi - 2\left(23 - 4\sqrt{2}\right)\right]r^2}$

3.4 Considerando nuevamente la figura 2.18:

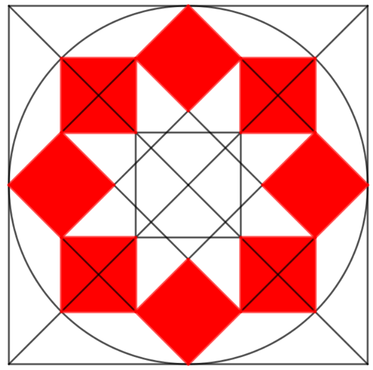


Figura 2.18

El número de triángulos rectángulos que se pueden contar en ella es:

A) 74
B) 66
C) 52
D) 48

Solución:

Para garantizar que serán contabilizados una sola vez, todos los triángulos rectángulos que se pueden observar con los trazos que presenta la figura 18, se utiliza la siguiente estrategia, consistente en identificar cada tipo de triángulo rectángulo con un color que permita buscar y contar cuántos de ellos hay.

En el cuadrado más grande de la figura 18 se observan los siguientes tipos de triángulos rectángulos, el de color azul turquesa, y el de color gris (figura 2.22):

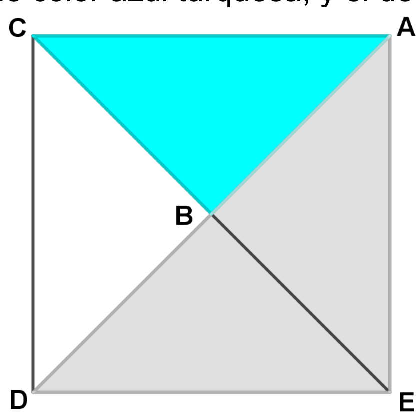


Figura 2.22

4 triángulos como el $\triangle ABC$ de color azul, y 4 como el $\triangle ADE$ de color gris

En una esquina de la figura 2.18 se observan los siguientes triángulos rectángulos (figura 2.23):

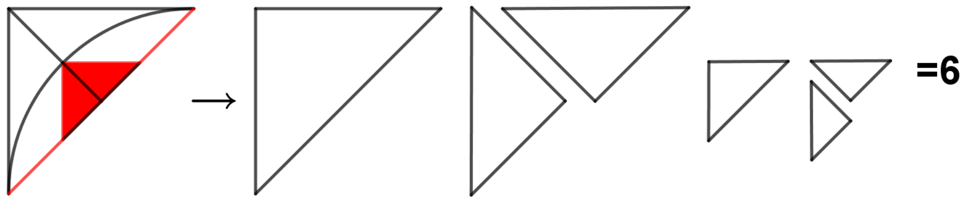


Figura 2.23

Y como hay cuatro esquinas, entonces se tienen $6 \times 4 = 24$ triángulos.

En el cuadrado de posición oblicua inscrito en la circunferencia de la figura 2.18 se observan los siguientes triángulos rectángulos (figura 2.24):

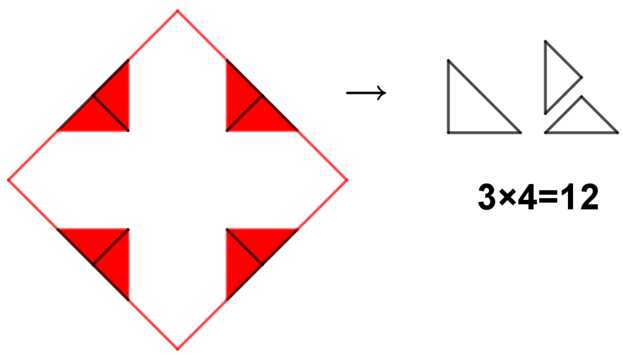


Figura 2.24

En el centro de la figura 2.18 se observan los siguientes triángulos rectángulos (figura 2.25):

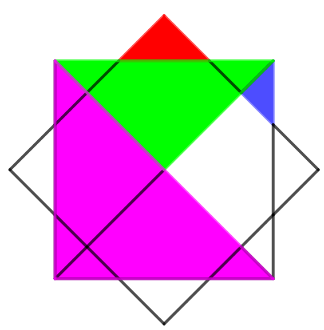


Figura 2.25

8 triángulos como el de color rojo, 8 triángulos como el de color azul
4 triángulos como el de color verde y 4 triángulos como el de color magenta

Y considerando la estrella central blanca de la figura 2.18, se observan los siguientes triángulos rectángulos (figuras 2.26 y 2.27):

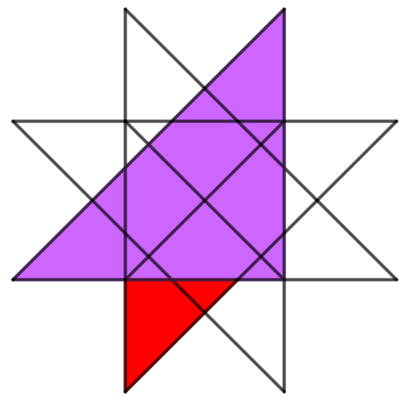


Figura 2.26

8 triángulos como el de color morado y 8 triángulos como el de color rojo

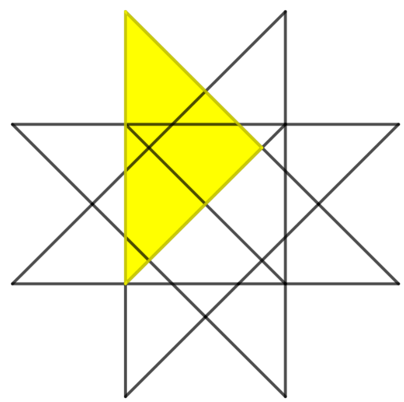


Figura 2.27

8 triángulos como el de color amarillo

Entonces en la figura 2.18 se observan $\mathbf{4+4+6+12+8+8+4+4+8+8+8=74}$ triángulos rectángulos.

Respuesta correcta: **A)** $\mathbf{74}$

3.5 El área de la estrella central blanca de la figura 18, en términos del radio r de la circunferencia es:

A) $A_e = 2\left(11+6\sqrt{2}\right)r^2$

B) $A_e = 2\left(11+4\sqrt{2}\right)r^2$

C) $A_e = 2\left(11+2\sqrt{2}\right)r^2$

D) $A_e = 2\left(11+\sqrt{2}\right)r^2$

Solución:

Si se suma el área calculada en el reactivo 3.2 con el área de los ocho cuadrados rojos de la figura 2.18 y el resultado se resta del área del círculo, se obtiene el área de la estrella central blanca:

Cada cuadrado rojo tiene un área de $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)r\right]^2=\left(3-2\sqrt{2}\right)r^2$, entonces el área A_e de la estrella central blanca es:

$$A_e=\pi r^2-\left[8\left(3-2\sqrt{2}\right)r^2+\left\{\pi-2\left(23-4\sqrt{2}\right)\right\}r^2\right]$$

$$A_e=\pi r^2-\left[24r^2-16\sqrt{2}r^2+\pi r^2-46r^2+8\sqrt{2}r^2\right]$$

$$A_e=2\left(11+4\sqrt{2}\right)r^2$$

Respuesta correcta: **B)** $\boldsymbol{A_e=2\left(11+4\sqrt{2}\right)r^2}$

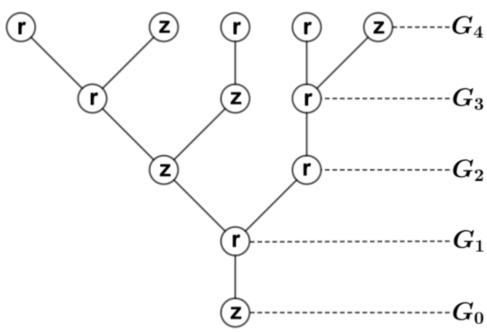
Situación 4. Patrones numéricos en el mundo de las abejas

Las abejas cuyo nombre científico es Athophila, son insectos himenópteros pertenecientes a la superfamilia Apoidea, son herbívoros polinizadores y ovíparos cuyo tamaño varía entre 12 y 18 milímetros, habitan en todos los continentes, excepto en la Antártida, donde hay plantas con flores de las que extraen el polen y néctar, el primero para obtener proteínas y otros nutrientes con qué alimentar a las larvas y el segundo como material energético. Son conocidos por su papel en la polinización y por producir la miel y la cera de abejas. Se trata de un linaje con más de $20\,000$ especies conocidas. La especie mejor conocida es la abeja doméstica (Apis mellifera), llamada simplemente abeja; esta especie es un insecto social que vive en colonias, colmenas o enjambres formados por tres clases de individuos: reina, obreras y zánganos. Todas las obreras y la reina son hembras, pero sólo la abeja reina se puede reproducir y todos los zánganos son machos. Las abejas obreras y reinas son producidas a partir de huevos fecundados y tienen un conjunto completo (doble) de cromosomas. Estas dos castas de hembras: la reina y las obreras, o dimorfismo, no depende de las diferencias genéticas, sino de la ingestión de jalea real, en el caso de las reinas. Los machos o zánganos, se desarrollan a partir de huevos no fertilizados y por tanto son haploides con un solo juego de cromosomas. Las abejas obreras limpian la colmena, recolectan el polen y el néctar para alimentar a la colonia y cuidan de las crías. El único trabajo del zángano es aparearse con la reina y el único trabajo de la reina es poner los huevos.

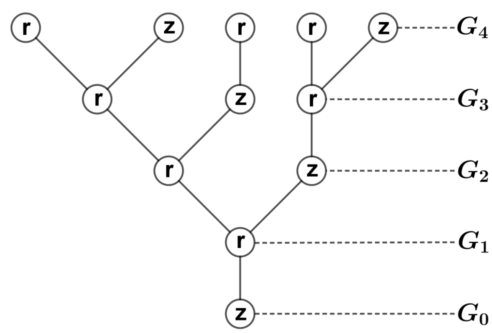
http://caribempresarial.com/wp-content/uploads/2019/01/abeja1.jpg

Figura 2.28

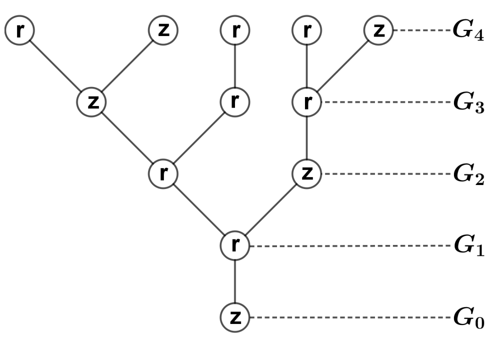
4.1 **Genealogía de un zángano de la colmena**. Tomando en cuenta las citadas condiciones de reproducción de las abejas melíferas y considerando a un zángano como la generación G_0 y a sus ascendientes o antepasados, los de las generaciones $G_1, G_2, G_3, \cdots, G_{n-2}, G_{n-1}, \cdots, G_n,$ la genealogía de un zángano hasta la cuarta generación G_4, donde "z" es un zángano y "r" es una reina, está representada por el esquema:



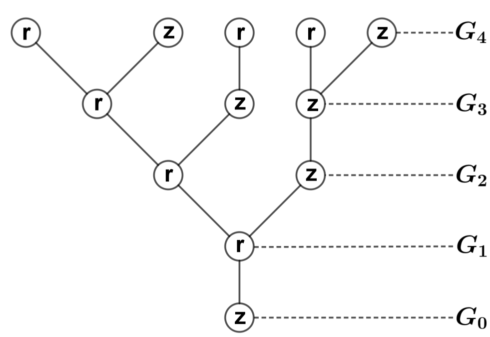
A)



B)



C)



D)

Solución:
Para determinar la genealogía se consideran las siguientes características de la reproducción de las abejas melíferas:

a) La abeja reina puede engendrar sin ser fecundada.
b) La abeja reina es engendrada por otra abeja reina que ha sido fecundada por un zángano.
c) El zángano es una abeja engendrada por una abeja reina no fecundada.

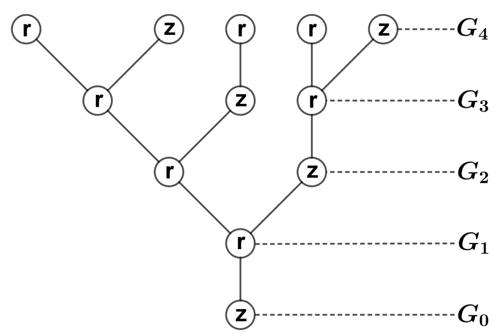
Al inicio del análisis genealógico sólo se tiene un zángano entonces la generación G_0 está integrada por un insecto.

De acuerdo con las características citadas de reproducción, el zángano de la generación G_0, debe tener una abeja reina como madre que no fue fecundada por lo que no tiene padre. Entonces la generación G_1 está integrada también por un solo insecto.

La generación G_2 representa a los abuelos del zángano de la generación G_0, es decir, a los padres de la abeja reina que es madre de este zángano. Entonces, considerando las características de reproducción, la generación G_2 está integrada por dos insectos, porque toda abeja reina es engendrada por otra abeja reina fecundada por un zángano.

La generación G_3 representa a los bisabuelos del zángano de la generación G_0, es decir, a los abuelos de la abeja reina de la generación G_1, y como consecuencia a los padres de las abejas de la generación G_2. Considerando las características de reproducción, G_2 está formada por un zángano que sólo tiene una abeja reina como madre, y por una abeja reina que tiene un padre zángano y una madre que también es abeja reina, así que G_3 está integrada por tres insectos.

Finalmente, la generación G_4 representa a los tatarabuelos del zángano de la generación G_0, que son bisabuelos de la abeja reina de la generación G_1, que a su vez son abuelos del zángano y la abeja reina de la generación G_2, y también padres del zángano y las dos abejas reinas de la generación G_3. Entonces, de acuerdo con las características de reproducción de las abejas, la generación G_4 está integrada por tres abejas reinas y dos zánganos, es decir, por cinco insectos.



Respuesta correcta: **B)**

4.2 Si $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ representan el número de abejas reinas en las generaciones $G_0, G_1, G_2, G_3, \cdots, G_{n-2}, G_{n-1}, \cdots, G_n,$ respectivamente, el patrón para determinar el número de abejas reinas de la generación G_n considerando el número de abejas reinas ascendientes de generaciones sucesivas es:

A) $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}$

B) $r_n = 2r_{n-1} - 1$

C) $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$

D) $r_n = (r_{n-1})(r_{n-2})$

Solución:
Considerando las características de reproducción de las abejas, se construye la siguiente tabla 1 que describe el número de abejas reinas por generación:

Generación	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
Abejas reinas	$r_0 = 0$	$r_1 = 1$	$r_2 = 1$	$r_3 = 2$	$r_4 = 3$	$r_5 = 5$	$r_6 = 8$	$r_7 = 13$	$r_8 = 21$

Tabla (2.1)

Analizando los resultados de la tabla se deduce que:
$r_2 = r_1 + r_0$, $r_3 = r_2 + r_1$, $r_4 = r_3 + r_2$, $r_5 = r_4 + r_3, r_6 = r_5 + r_4$, y así sucesivamente. Entonces se concluye que el patrón es $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$

Respuesta correcta: **C)** $\boldsymbol{r_n = r_{n-1} + r_{n-2}}$

4.3 Si $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ representan el número de abejas zánganos en las generaciones $G_0, G_1, G_2, G_3, \cdots, G_{n-2}, G_{n-1}, \cdots, G_n$, respectivamente, el patrón para determinar el número de abejas zánganos de la generación G_n considerando el número de abejas zánganos ascendientes de generaciones sucesivas es:

A) $z_n = z_{n-2} + z_{n-1}$

B) $z_n = z_{n-1} - z_{n-2}$

C) $z_n = 2z_{n-1} + 1$

D) $z_n = 2z_{n-1} - 1$

Solución:
Considerando las características de reproducción de las abejas, se construye la siguiente tabla 2 que describe el número de abejas zánganos por generación:

Generación	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
Abejas zánganos	$z_0 = 1$	$z_1 = 0$	$z_2 = 1$	$z_3 = 1$	$z_4 = 2$	$z_5 = 3$	$z_6 = 5$	$z_7 = 8$	$z_8 = 13$

Tabla (2.2)

Analizando los resultados de la tabla se deduce que:
$z_2 = z_1 + z_0$, $z_3 = z_2 + z_1$, $z_4 = z_3 + z_2$, $z_5 = z_4 + z_3, z_6 = z_5 + z_4$, y así sucesivamente. Entonces se concluye que el patrón es $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$

Respuesta correcta: **A)** $\boldsymbol{z_n = z_{n-1} + z_{n-2}}$

4.4 Si $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$, $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ y $t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n$ representan el número de abejas reinas, el número de abejas zánganos y el número total de abejas en las generaciones $G_0, G_1, G_2, G_3, \cdots, G_{n-2}, G_{n-1}, \cdots, G_n$, respectivamente, un patrón para determinar el número total de abejas de la generación G_n considerando el número de abejas reinas y el número de zánganos ascendientes de generaciones sucesivas es:

A) $t_n = 2t_{n-1} - 1$

B) $t_n = 2t_{n-1} + 1$

C) $t_n = 2r_{n-1} + z_{n-1}$

D) $t_n = r_{n-1} + 2z_{n-1}$

Solución:

Considerando las características de reproducción de las abejas, se construye la siguiente tabla (2.3) que describe el número de abejas reinas, el número de abejas zánganos y el número total de abejas por generación:

Generación	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
Abejas reinas	$r_0 = 0$	$r_1 = 1$	$r_2 = 1$	$r_3 = 2$	$r_4 = 3$	$r_5 = 5$	$r_6 = 8$	$r_7 = 13$	$r_8 = 21$
Abejas zánganos	$z_0 = 1$	$z_1 = 0$	$z_2 = 1$	$z_3 = 1$	$z_4 = 2$	$z_5 = 3$	$z_6 = 5$	$z_7 = 8$	$z_8 = 13$
Total deAbejas	$t_0 = 1$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	$t_4 = 5$	$t_5 = 8$	$t_6 = 13$	$t_7 = 21$	$t_8 = 34$

Tabla (2.3)

Analizando los resultados de la tabla (2.3) se deduce que:

$t_2 = 2r_1 + z_1$, $t_3 = 2r_2 + z_2$, $t_4 = 2r_3 + z_3$, $t_5 = 2r_4 + z_4$, $t_6 = 2r_5 + z_5$, y así sucesivamente. Entonces se concluye que el patrón es $t_n = 2r_{n-1} + z_{n-1}$

Respuesta correcta: **C)** $\boldsymbol{t_n = 2r_{n-1} + z_{n-1}}$

4.5 Otro patrón para determinar el número total de abejas por generación es:

A) $t_n = 2r_{n-1} + z_{n-1} + z_{n-2}$

B) $t_n = r_{n-1} + z_{n-1} + 2z_{n-2}$

C) $t_n = r_{n-1} + z_{n-1} + z_{n-2}$

D) $t_n = r_{n-1} + 2z_{n-1} + z_{n-2}$

Solución:

Analizando los resultados de la tabla (2.3) se deduce que:

$t_2 = r_1 + 2z_1 + z_0$, $t_3 = r_2 + 2z_2 + z_1$, $t_4 = r_3 + 2z_3 + z_2$, $t_5 = r_4 + 2z_4 + z_3$, $t_6 = r_5 + 2z_5 + z_4$, y así sucesivamente. Entonces se concluye que el patrón es $t_n = r_{n-1} + 2z_{n-1} + z_{n-2}$

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{t_n = r_{n-1} + 2z_{n-1} + z_{n-2}}$

4.6 Comparando los patrones obtenidos en los reactivos 4.4 y 4.5 que determinan el número total de abejas por generación, se deduce que:

A) $r_{n-1} = z_{n-1} + 2z_{n-2}$

B) $r_{n-1} = z_{n-1} + z_{n-2}$

C) $r_{n-1} = z_n + 2z_{n-1}$

D) $r_{n-1} = z_n + 2z_{n-1}$

Solución:
El patrón obtenido en el reactivo 4.4 es $t_n = 2r_{n-1} + z_{n-1}$ y el patrón del reactivo 4.5 es $t_n = r_{n-1} + 2z_{n-1} + z_{n-2}$, entonces como ambos determinan el número total de abejas, al igualar ambos patrones se obtiene:

$$2r_{n-1} + z_{n-1} = r_{n-1} + 2z_{n-1} + z_{n-2}$$

Y simplificando se obtiene: $r_{n-1} = z_{n-1} + z_{n-2}$

Respuesta correcta: **B)** $\boldsymbol{r_{n-1} = z_{n-1} + z_{n-2}}$

Situación 5. Los números y las cualidades humanas.

El pitagorismo fue un movimiento filosófico-religioso de mediados del siglo VI a. C. fundado por Pitágoras de Samos, siendo ésta la razón por la cual sus seguidores recibían el nombre de pitagóricos. En la exposición “Everything is number” se destaca que los pitagóricos se dieron cuenta que los números están en todo desde las armonías de la música hasta las órbitas de los planetas y esto los llevó a proclamar que todo es número. Por otro lado, el matemático G.H. Hardy (1877-1947) afirmó “Un matemático al igual que un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de los otros es porque están compuestos de ideas. Con el paso del tiempo, las ideas se deterioran menos que las palabras”. Así que no es casualidad que los números sean objeto del arte como es el caso del artista futurista italiano Giacomo Balla (1871-1958) que pintó una obra titulada “Los números enamorados” en 1924, o como el escultor y grabador norteamericano Jonathan Borofski (1942 a la fecha) que en 1992 también realizó una escultura sobre los números enamorados, asociando ambos una cualidad humana como es el amor, a los números. Los matemáticos también suelen relacionar los números, especialmente los números naturales con las cualidades o defectos humanos mediante la exploración de las propiedades o patrones que presentan. Así han definido números primos, compuestos, perfectos, felices, tristes, odiosos, ondulados, vampiros, oblongos, primos gemelos, amigos; primos de Fermat, primos de Mersenne, narcisistas, ambiciosos, hambrientos, capicúas, sociables, intocables, poderosos, prácticos, raros, novios, malvados, perniciosos, poligonales, afortunados, automorfos, cíclicos, intocables, sublimes, abundantes, escasos, parásitos, apocalípticos.

Los números enamorados
https://pt.wahooart.com/@@/8XY4NE-Giacomo-Balla-N%C3%BAmeros-no-amor
https://culturacientifica.com/app/uploads/2019/03/imagen-2-1.jpg
Figura 2.29

5.1 Un número capicúa es aquel número natural que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, de tal forma que a partir de un número natural dado se obtiene un número capicúa si se le suma el que resulta de invertir el orden de sus cifras, repitiendo el proceso las veces necesarias hasta obtenerlo. Con base en esta definición y aplicando el patrón, el número capicúa que se obtiene partiendo del número natural 96 es:

A) 3993
B) 4884
C) 5775
D) 6666

Solución:
Al aplicar el algoritmo al número 96 se obtiene:

$$96+69=165,\ 165+561=726,\ 726+627=1353,\ 1353+3531=4884$$

Y como 4884 se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, entonces es el número capicúa que se obtiene partiendo de 96.
Respuesta correcta: **B)** $\mathbf{4884}$

4.7 Un número vampiro es aquel número natural con un número (no primo) de cifras par, cuya característica especial es que al multiplicar una combinación de la mitad de sus cifras con una combinación de la otra mitad, el resultado es dicho número. A esos dos números que se multiplican se les llama colmillos y los dos colmillos no pueden terminar en cero. Con base en esta definición y aplicando el patrón, identificar cuál de los siguientes números naturales es un número vampiro:

A) 2186
B) 1826
C) 1340
D) 1260

Solución:
Aplicando el algoritmo al número 1260 se obtiene:

$$12\times 60=720\,,\ 16\times 20=320\,,\ 26\times 10=260\,,\ 61\times 20=1220\,,\ 21\times 60=1260$$

Y como 21×60 da como resultado el número dado, entonces 1260 es un número vampiro cuyos colmillos son los números 21 y 60.
Respuesta correcta: **D) $\mathbf{1260}$**

4.8 Dos números naturales son amigos si la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro número y viceversa. Se considera la unidad como divisor propio de un número, no así el propio número. Con base en esta definición y aplicando el patrón, ¿cuáles de los siguientes pares de números naturales son amigos?

A) 220 y 284
B) 220 y 288
C) 1184 y 1220
D) 6230 y 6368

Solución:
Aplicando el algoritmo a los números 220 y 284 se obtiene:
Los divisores propios de 220 son: $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11,\ 20,\ 22,\ 44,\ 55$ y 110 y su suma es:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

Los divisores propios de 284 son: $1,\ 2,\ 4,\ 71$ y 142 y su suma es:

$$1+2+71+142=220$$

Como se cumple que la suma de los divisores propio de uno de ellos es igual al otro número y viceversa, entonces 220 y 284 son números amigos.
Respuesta correcta: **A) $\mathbf{220}$ y $\mathbf{284}$**

4.9 Los números de Fermat son números naturales de la forma $2^{2^n}+1$, donde n es un número natural. Con base en el patrón, determinar cuál de los siguientes números naturales es un número de Fermat:

A) 129
B) 257
C) 513
D) 1025

Solución:
Para identificar un número de Fermat se debe comprobar que existe un n que es número natural para el que se cumple que se obtiene el número objeto del análisis mediante la expresión $2^{2^n}+1$.
Analizando el número 257 se obtiene:

$$2^{2^n}+1=257$$
$$2^{2^n}=256$$
$$2^{2^n}=2^8$$

Entonces se cumple que:

$$2^n=8$$
$$2^n=2^3$$

De donde $n=3$ es un número natural, por lo tanto 257 es un número de Fermat.
Respuesta correcta: **B) 257**

Situación 6. Conteo de patrones geométricos y el cubismo analítico.

Georges Braque junto a Pablo Picasso crean el cubismo analítico (1909-1912), en donde la pintura es casi monocroma (que presenta una sola tonalidad) en gris y ocre. El objetivo es examinar todas las múltiples figuras geométricas y ordenarlas por separado. Los planos en los que se descompone la figura son grandes, abiertos y comunicantes. Las imágenes se convierten en una serie de planos de tamaño desigual, discontinuos y cortados con complejos entramados de líneas. El volumen y la profundidad de los objetos desaparecen ante la infinidad de fragmentos en que se descomponen a modo de cristalinos reflejos de la realidad. El grado de complejidad del cubismo analítico reside en su dificultad de lectura por parte del espectador, la geometrización de las formas, es muy específica en un intento por representar la totalidad del objeto. Sobre un campo de colores neutros, que suelen ser tonos ocres, se plasma la geometrización de los diferentes ángulos de visión de un mismo objeto. Además, la carencia de solidez de estas figuras geométricas dificulta aún más, en la mayoría de los casos, la visualización simple del objeto representado. Esto, por supuesto, no sólo resulta muy complicado de explicar, sino también de apreciar por sí mismo, el espectador común será capaz de observar sólo figuras geométricas, pero difícilmente traducirá lo que ve sin ayuda de un título que le sirva de guía. El espectador debe multiplicar su mirada para poder captar todo lo representado, por tanto, el precio que se le exige para apreciar este arte es un esfuerzo intelectual considerable de observación y análisis.

Pablo Picasso Mujer con guitarra Georges Braque Casas en el estanque

https://www.slobidka.com/pablo-picasso/124-picasso-ma-jolie-mujer-con-mandolina-o-guitarra.html
https://www.pinterest.com.mx/pin/538461699179642147/

Figura 2.30

6.1 El número de rectángulos que hay en la figura 2.31 es:

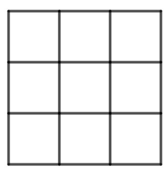


Figura 2.31

A) 60
B) 36
C) 30
D) 18

Solución:
Un rectángulo es un polígono porque es una figura geométrica plana compuesta por una secuencia de cuatro segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano. Los segmentos son llamados lados y los puntos en que se intersecan son llamados vértices. Dentro de la gama de los polígonos, el rectángulo también es llamado cuadrilátero ya que tiene cuatro lados. Si se analiza como cuadrilátero, el rectángulo es un paralelogramo ya que sus lados son paralelos dos a dos. Y si se analiza como paralelogramo, el rectángulo es aquel cuyos lados opuestos tienen la misma longitud y sus ángulos interiores son rectos. El cuadrado es un caso particular de rectángulo.
Tomando en cuenta los conceptos anteriores, se utiliza la siguiente estrategia para garantizar que todos los rectángulos serán contabilizados una sola vez:

En la figura 2.32 se muestra un rectángulo sombreado (cuadrado) de tamaño 1×1:

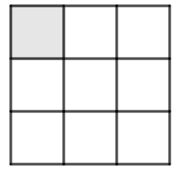


Figura 2.32

Es evidente que de estos hay nueve.
Ahora se contabilizan los rectángulos horizontales que se muestran sombreados en la figura 2.33 de tamaño 1×2:

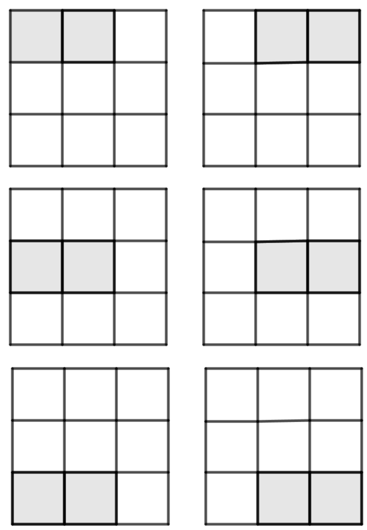


Figura 2.33

Se observa que hay seis de ese tamaño.
Se contabilizan los rectángulos verticales que se muestran sombreados en la figura 2.34 de tamaño 2×1:

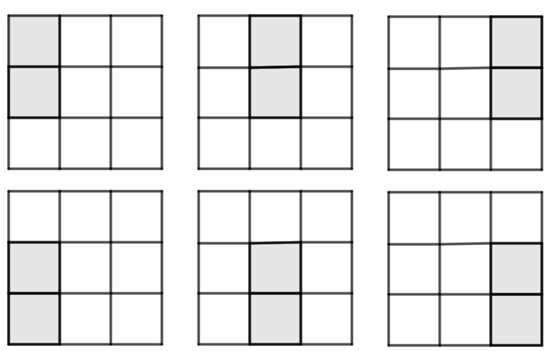


Figura 2.34

Se contabilizan seis de ese tamaño.
En seguida se contabilizan los rectángulos horizontales que se muestran sombreados en la figura 2.35 de tamaño 1×3:

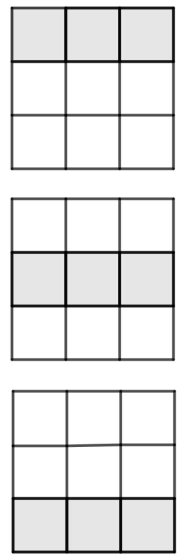


Figura 2.35

Se observan tres de ese tamaño.
Ahora se contabilizan los rectángulos verticales que se muestran sombreados en la figura 2.36 de tamaño 3×1:

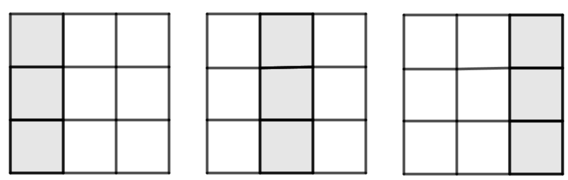


Figura 2.36

Se contabilizan tres de ese tamaño.
En seguida se contabilizan los rectángulos horizontales que se muestran sombreados en la figura 2.37 de tamaño 2×3:

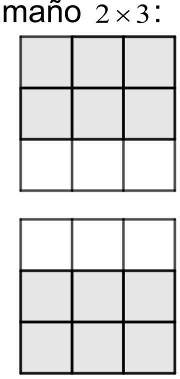


Figura 2.37

Se contabilizan dos de ese tamaño.

A continuación se contabilizan los rectángulos verticales que se muestran sombreados en la figura 2.38 de tamaño 3×2:

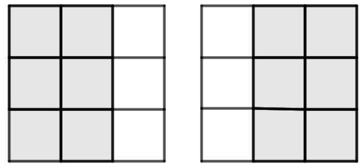


Figura 2.38

Se contabilizan dos de ese tamaño.

Ahora se contabilizan los rectángulos (cuadrados) que se muestran sombreados en la figura 2.39 de tamaño 2×2:

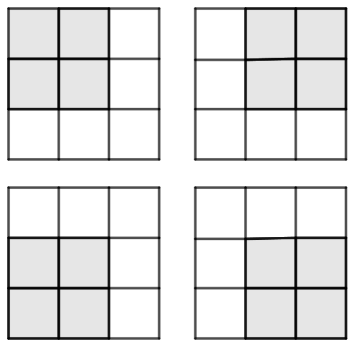


Figura 2.39

Se contabilizan cuatro de ese tamaño.

Finalmente se contabiliza el rectángulo completo (Cuadrado) de 3×3

En resumen, en la figura 2.31 hay 9 rectángulos de 1×1, 6 rectángulos de 1×2, 6 rectángulos de 2×1, 3 rectángulos de 1×3, 3 rectángulos de 3×1, 2 rectángulos de 2×3, 2 rectángulos de 3×2, 4 rectángulos de 2×2 y 1 rectángulo de 3×3. En total son 36 rectángulos.

Respuesta correcta: **B)** $\mathbf{36}$

6.2 La regularidad que se presenta al contar el número de rectángulos que hay según su tamaño en el tablero de tres renglones por tres columnas de la figura 2.31 determina que la cantidad de rectángulos es igual a:

A) El número de rectángulos de un cierto tamaño que hay horizontalmente por el número de rectángulos del mismo tamaño que hay verticalmente.

B) El número de rectángulos de un cierto tamaño que hay horizontalmente más el número de rectángulos del mismo tamaño que hay verticalmente.

C) El doble del número de rectángulos de cierto tamaño que hay horizontalmente por el número de rectángulos del mismo tamaño que hay verticalmente.

D) El número de rectángulos de cierto tamaño que hay horizontalmente más el doble del número de rectángulos del mismo tamaño que hay verticalmente.

Regularidad numérica es una sucesión de elementos o números que siguen un patrón o regla de formación.

Solución:
Para deducir la regularidad se construye la tabla (2.4) que facilita el análisis para descubrir el patrón que se presenta en el recuento de rectángulos de los distintos tamaños que se observan en la figura 2.31:

Tamaño del rectángulo	**Número de rectángulos observados horizontalmente en la figura 2.31**	**Número de rectángulos observados verticalmente en la figura 2.31**	**Total de rectángulos contados**
1×1	3	3	$3\times 3=9$
1×2	2	3	$2\times 3=6$
2×1	3	2	$3\times 2=6$
1×3	1	3	$1\times 3=3$
3×1	3	1	$3\times 1=3$
2×3	1	2	$1\times 2=2$
3×2	2	1	$2\times 1=2$
2×2	2	2	$2\times 2=4$
3×3	1	1	$1\times 1=1$
Total:	18	18	36

Tabla 2.4

De la tabla se observa que el número de rectángulos de cierto tamaño posible que hay en la figura 2.31, se puede calcular multiplicando el número de rectángulos que hay de ese tamaño contados horizontalmente por el número de rectángulos que hay también de ese tamaño contados verticalmente.

Respuesta correcta: **A) El número de rectángulos de un cierto tamaño que hay horizontalmente por el número de rectángulos del mismo tamaño que hay verticalmente.**

6.3 El patrón para determinar el número total de rectángulos que hay en el tablero de 3×3 de la figura 2.31 es:

A) $1^2+2^2+3^2$

B) $2\left(1^2+2^2+3^2\right)$

C) $1^3+2^3+3^3$

D) $2\left(1^3+2^3+3^3\right)$

Patrón es una sucesión de atributos que se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o de recurrencia.

Solución:
Para encontrar el patrón que determina el número total de rectángulos en la figura 2.31 se utiliza la tabla (2.5) que contiene los datos estudiados en forma sistematizada. Efectuando un sencillo análisis de los rectángulos que se observan en la figura 2.31 se concluye que los hay de tamaños 3×3, 2×3 (o de 3×2), 2×2, 1×3 (o de 3×1), 1×2 (o de 2×1) y 1×1, por lo que se obtiene el ordenamiento de rectángulos mostrado de la tabla (2.5):

Tamaño de los rectángulos	**Total de rectángulos por tamaño**	**6.4 Regularidad en el total de rectángulos por tamaño**
3×3	1	1^3
2×3 (o 3×2)	4	2^3
2×2	4	
1×3 (o 3×1)	6	3^3
1×2 (o 2×1)	12	
1×1	9	

Tabla (2.5)

Se observa en la tabla (2.5) que los rectángulos están ordenados y agrupados en forma decreciente de su área y altura como se muestra en la figura 2.40:

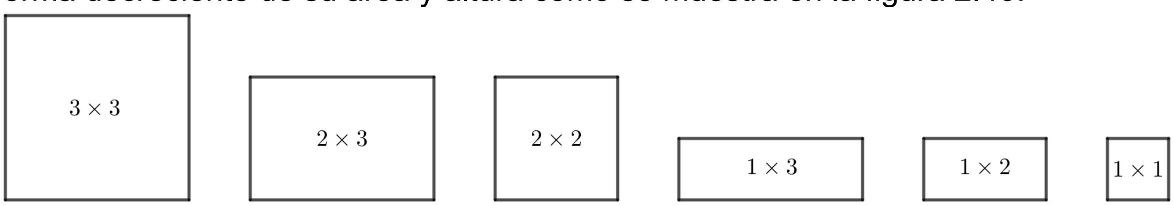


Figura 2.40

Entonces el patrón para determinar el número total de rectángulos de la figura 2.31 es:

$$1^3+2^3+3^3=36$$

Respuesta correcta: **C)** $\mathbf{1^3+2^3+3^3}$

6.4 El patrón para obtener el número de rectángulos en un tablero de tamaño $n\times n$ es:

A) $\frac{n}{2}(1+n)$

B) $\frac{n}{4}(1+n)$

C) $\frac{n^2}{2}(1+n)^2$

D) $\frac{n^2}{4}(1+n)^2$

Solución:
Mediante el análisis de los casos particulares mostrados en la tabla (2.6):

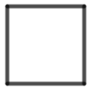
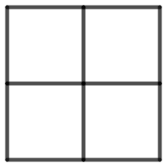
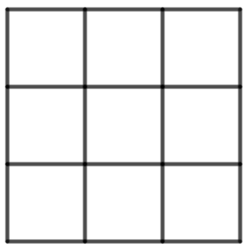
Tablero	**Número total de rectángulos**
 1×1	$1^3 = 1$
 2×2	$1^3 + 2^3 = 9$
 3×3	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$

Tabla (2.6)

En el tablero 1×1, es evidente que hay un sólo rectángulo.
En el tablero 2×2 hay 4 rectángulos de 1×1, 4 rectángulos de 1×2 y 1 rectángulo de 2×2, es decir, un total de 9 rectángulos.
En el tablero de 3×3 se verificó en el reactivo 4.1 que hay 36 rectángulos.
La regularidad que se observa en estos casos particulares, permite inferir que para tableros de tamaños 4×4, 5×5, 6×6, y así sucesivamente, el número total de rectángulos será:

Tablero 4×4: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100$ rectángulos

Tablero 5×5: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$ rectángulos

Tablero 6×6: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441$ rectángulos

Entonces en general para un tablero $n\times n$, el número total de rectángulos será:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3.$$

Pero, ¿qué cantidad de rectángulos representa esta expresión?, si se utiliza para determinar la cantidad de rectángulos cuando $n = 1000$, o bien, un número mayor, es evidente que el cálculo aritmético es muy laborioso.
Para evitar este trabajo se determina el patrón de cálculo mediante el siguiente análisis:
Se debe observar que:

Para el tablero 1×1, $1^3 = 1 = 1^2$

Para el tablero 2×2, $1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$

Para el tablero 3×3, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$

Para el tablero 4×4, $1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$

Para el tablero 5×5, $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=15^2$

Para el tablero 6×6, $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=441=21^2$

Pero:

1^2

$3^2=(1+2)^2$

$6^2=(1+2+3)^2$

$10^2=(1+2+3+4)^2$

$15^2=(1+2+3+4+5)^2$

$21^2=(1+2+3+4+5+6)^2$

Así que, debe esperarse que para el tablero $n\times n$:

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+\cdots+(n-2)^3+(n-1)^3+n^3=(1+2+3+4+5+6+\cdots+n)^2$

Para obtener la suma $1+2+3+4+5+6+\cdots+n$, se analiza un caso particular, por ejemplo, ¿cómo sumar los primeros cien números naturales:

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+98+99+100$$

Se debe notar que, sumando el primer número con el último, el segundo número con el penúltimo, y así sucesivamente, se obtienen cincuenta sumas de pares de números naturales que totalizan los cien números, y cada suma es igual a 101. Entonces el resultado es:

$1+2+3+4+5+6+\cdots+98+99+100=\frac{100}{2}(1+100)=5050$

Así que generalizando para $1+2+3+4+5+6+\cdots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n}{2}(1-n)$.

Sustituyendo $n=100$ se puede comprobar que se obtiene 5050:

$$\frac{100}{2}(1+100)=50(101)=5050.$$

Con este resultado es sencillo obtener el patrón que se busca:

$$(1+2+3+4+5+6+\cdots+n)^2=\left[\frac{n}{2}(1+n)\right]^2$$

Y simplificando la expresión se obtiene:

$$\left[\frac{n}{2}(1+n)\right]^2=\frac{n^2}{4}(1+n)^2$$

Entonces el patrón para obtener el número de rectángulos en un tablero de tamaño $n\times n$ es $\frac{n^2}{4}(1+n)^2$

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{\frac{n^2}{4}(1+n)^2}$

Situación 7. Orbitando alrededor de π

El número π es el más conocido históricamente, el más famoso, el más tratado, el más renombrado, el más citado, el más celebrado. Todo lo que se pueda decir de este número es poco, su desarrollo decimal con cincuenta decimales es:

$$\pi \approx 3.1415926535\,8979323846\,2643383279\,5028841971\,6939937510\cdots$$

Y con esas cincuenta mágicas cifras se puede transitar por casi todo el ancho mundo de los cálculos, aunque es raro encontrar un problema que precise conocer más de diez dígitos de π. En realidad lo común es usar las aproximaciones 3.14 o 3.1416 para los cálculos elementales.

Isaac Asimov escribió una vez: “Si el Universo fuera esférico y tuviera un diámetro de $80\,000$ millones de años luz, el error que se cometería al calcular el ecuador celeste con el valor de π con 35 cifras, sería menor que la millonésima de centímetro”. Si se escribe el desarrollo decimal de π que se conoce hoy en día, situados en algún punto del ecuador terrestre y con números semejantes en tamaño a los escritos aquí, daría más de 500 vueltas al globo terrestre.

Ahora se sabe que la secuencia 0123456789 se encuentra a partir del decimal $17\,387\,594\,880$ del desarrollo de π. Actualmente una utilidad de conocer tal desarrollo decimal de π es comprobar el buen funcionamiento de un superordenador imponiéndole la tarea de calcular estos dígitos conocidos.

La obsesión por este número ha llevado a acuñar el término “pimanía” lo que lleva a la conclusión que π es algo más que un número.

Figura 2.41

Martijn Koomen y Tadas Maksimovas crearon una bicicleta completamente funcional **inspirada en el símbolo π**
https://matematicascercanas.com/2018/04/09/pi-bike/

Escultura de Barbara Grygutis erigida en Coneticut que representa a π
https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRXl86muBCLh47ybzNQjUFzlRwKmKLXa-7n5AYLTgdzlBXKyfsJ

7.1 Dada una circunferencia de radio r y su cuadrado inscrito, el doble de la razón constante entre el área del círculo y el área de su cuadrado inscrito es:

A) 2π

B) $\frac{3}{2}\pi$

C) π

D) $\frac{\pi}{2}$

La razón de la circunferencia con su diámetro, es una constante de carácter intuitivo que se obtuvo de la simple observación. Cuando crece el diámetro (que es dos veces el radio), crece proporcionalmente la longitud o perímetro de la circunferencia. Dicha constante es el número π, es decir, $\frac{P}{d} = \pi$.

Solución:

Considerando la figura 2.42 que muestra una circunferencia de radio r y un cuadrado inscrito en ella:

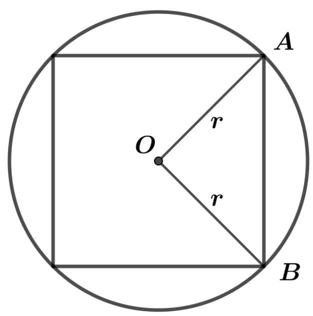


Figura 2.42

El área del círculo de radio r es $A_c = \pi r^2$

Y como el área del cuadrado es igual al cuadrado del lado $\overline{AB}$, por la elemental aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo $\triangle AOB$ de la figura 2.42, se obtiene la magnitud del lado del cuadrado:

$$\overline{AB} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$$

Así que el área del cuadrado inscrito es: $A_{\square} = \left(\sqrt{2}r\right)^2 = 2r^2$

Entonces la razón entre el área del círculo y el área del cuadrado inscrito es:

$$\frac{A_c}{A_{\square}} = \frac{\pi r^2}{2r^2} = \frac{\pi}{2}$$

De manera que el doble de esta razón es: $2\frac{\pi}{2} = \pi$

Como conclusión: el número π no sólo es la razón constante entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro, sino que también es el doble de la razón constante entre el área del círculo y el área de su cuadrado inscrito.

Respuesta correcta: **C) π**

7.2 Dado un círculo de radio 1, se construyen polígonos regulares inscritos y circunscritos. La figura 2.43 muestra dos hexágonos (inscrito y circunscrito), dos dodecágonos (inscrito y circunscrito) y un icosakaitetrágono inscrito (24 lados). Considerando h_i y h_c los perímetros de los hexágonos inscrito y circunscrito, respectivamente; d_i y d_c los perímetros de los docecágonos inscrito y circunscrito; i_i e i_c los perímetros de los icosakaitetrágonos inscrito y circunscrito, la fórmula que muestra que el perímetro i_i es cercano a π es:

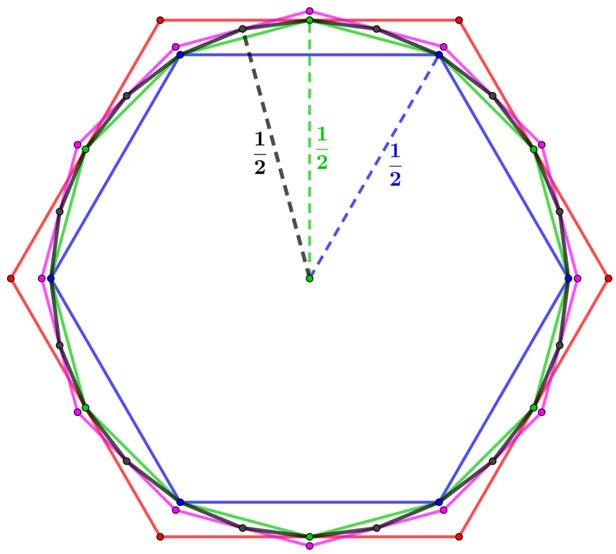


Figura 2.43

A) $i_i = d_c\sqrt{\dfrac{2d_i}{d_i + d_c}}$

B) $i_i = d_i\sqrt{\dfrac{2d_i}{d_i + d_c}}$

C) $i_i = d_c\sqrt{\dfrac{2d_c}{d_i + d_c}}$

D) $i_i = d_i\sqrt{\dfrac{2d_c}{d_i + d_c}}$

Solución:

Se calcula el perímetro i_i del icosakaitetrágono inscrito mediante el siguiente procedimiento:

Se determina la longitud de uno de sus lados aplicando la ley de senos en uno de los triángulos isósceles que se forman con el centro del polígono, (que es el centro del círculo de diámetro unitario) como uno de sus vértices y los extremos del lado como los otros dos vértices:

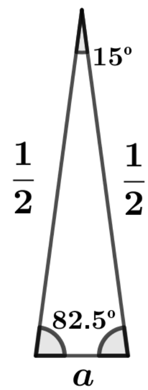


Figura 2.44

$$\frac{a}{sen\left(15º\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{sen\left(82.5º\right)}\Rightarrow a=\frac{\frac{1}{2}sen\left(15º\right)}{sen\left(82.5º\right)}=0.1305$$

Entonces el perímetro del icosakaitetrágono inscrito es $i_i=24\left(0.1305\right)=3.1326$ que es cercano al valor de π .

Ahora se determinan los perímetros de los dodecágonos inscrito y circunscrito:
Para el dodecágono inscrito, se determina la longitud de uno de sus lados aplicando la ley de senos en uno de los triángulos isósceles que se forman con el centro del polígono, (que es el centro del círculo de diámetro unitario) como uno de sus vértices y los extremos del lado del dodecágono inscrito como los otros dos vértices:

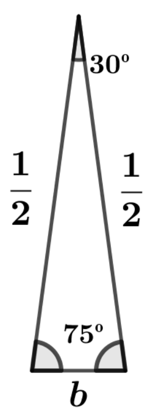


Figura 2.45

$$\frac{a}{sen\left(30º\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{sen\left(75º\right)}\Rightarrow a=\frac{\frac{1}{2}sen\left(30º\right)}{sen\left(75º\right)}=0.2588$$

Entonces el perímetro del dodecágono inscrito es $d_i=12\left(0.2588\right)=3.1058$

Para el dodecágono circunscrito, se determina la longitud de uno de sus lados aplicando la tangente en uno de los triángulos rectángulos en que la altura divide a uno de los triángulos isósceles que se forman con el centro del polígono, (que es el centro del círculo de diámetro unitario) como uno de sus vértices y los extremos del lado del dodecágono circunscrito como los otros dos vértices, sabiendo que su altura es la mitad del diámetro de la circunferencia inscrita:

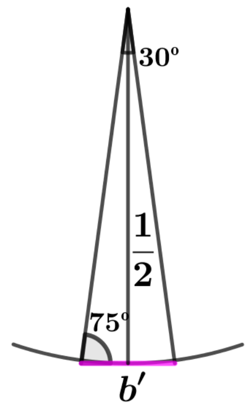


Figura 2.46

$$\frac{\frac{b'}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan(15^{\circ}) \Rightarrow b' = \tan(15^{\circ}) = 0.2679$$

Entonces el perímetro del dodecágono circunscrito es $d_c = 12(0.2679) = 3.2154$

Sustituyendo los perímetros $d_i = 3.1058$ y $d_c = 3.2154$ en la fórmula $i_i = d_i\sqrt{\frac{2d_c}{d_i + d_c}}$ se obtiene:

$$i_i = d_i\sqrt{\frac{2d_c}{d_i + d_c}} = 3.1058\sqrt{\frac{2(3.2154)}{3.1058 + 3.2154}} = 3.1326$$

Se observa que es el perímetro del icosakaitetrágono cercano al valor de π .

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{i_i = d_i\sqrt{\frac{2d_c}{d_i + d_c}}}$

7.3 Suavecito fabrica rollos de papel sanitario de $10\,cm$ de ancho. En un cilindro de cartón de $1\,cm$ de radio, el papel se enrolla hasta completar 600 vueltas para lograr $10\,cm$ de diámetro. ¿Cuántos metros mide la cinta de papel?

A) 36π
B) 45π
C) 60π
D) 72π

Solución:
En la figura 2.47 se muestra un dibujo del rollo de papel con las dimensiones enunciadas:

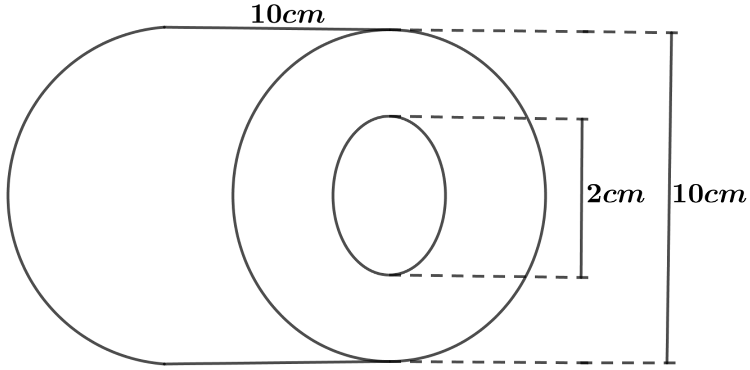


Figura 2.47

Se calcula el volumen de la cinta de papel sanitario enrollada al cilindro de cartón $V = V_r - V_c$, donde V_r es el volumen del rollo y V_c es el volumen del cilindro de cartón:

$$V = V_r - V_c = \pi r_r^2 h - \pi r_c^2 h = \pi h\left(r_r^2 - r_c^2\right)$$

Entonces $V = V_r - V_c = \pi r_r^2 h - \pi r_c^2 h = (10\ cm)\pi\left((5\ cm)^2 - (1\ cm)^2\right) = 240\pi\ cm^3$

Ahora se calcula el volumen de la cinta de papel estirada, para lo cual es necesario conocer el espesor del papel:

$$e = \frac{\frac{10\text{-}2}{2}\ cm \text{ de espesor del papel enrollado}}{600 \text{ vueltas}} = \frac{1}{150}\ cm$$

Así que el volumen del papel estirado es $V = L \times h \times e$, donde L es la longitud del papel, h es al ancho del papel y e es su espesor:

$$V = (L\ cm)(10\ cm)\left(\frac{1}{150}\ cm\right)$$

Igualando ambos volúmenes y despejando L se obtiene:

$$(L\ cm)(10\ cm)\left(\frac{1}{150}\ cm\right) = 240\pi\ cm^3$$

$$L = \frac{240\pi\ cm^3}{\left(\frac{1}{15}\ cm^2\right)} = 3600\pi\ cm$$

Y convertidos a metros $L = 36\pi\ m$

Respuesta correcta: **A)** 36π

7.4 La bicicleta de ruta de la figura 41 es rodada 27 con un diámetro de ruedas de $622\,mm$. Si en una competencia de ruta las llantas dieron $7\,680$ vueltas para llegar a la meta, ¿de cuántos kilómetros fue la competencia:

A) $10\,km$

B) $15\,km$

C) $20\,km$

D) $25\,km$

Solución:
Se calcula el perímetro de la circunferencia que forman las ruedas de la bicicleta, sabiendo que su diámetro es de $622\,mm$:

$$P = \pi d = 622\pi\ mm$$

Para saber el recorrido en milímetros de la bicicleta, se multiplica el perímetro de las ruedas por el número de vueltas que dieron:

$$\textit{Recorrido} = 7680P = (7680)(622\pi) = 4\,776\,960\pi\ mm$$

Y Finalmente se efectúa la conversión a kilómetros:

$$\textit{Recorrido} = (4\,776\,960\pi\ mm)\left(\frac{1\,km}{1\,000\,000\,mm}\right) = 4.776\,960\pi\ km = 15\,km$$

Respuesta correcta: **B)** $\mathbf{15\,km}$

Desafío:

7.5 En el cuadrado de lados de longitud 1 de la figura 2.48, $\overline{BD}$ es perpendicular a la diagonal $\overline{OB}$, y $\overline{OD}$ es la bisectriz del ángulo $\angle COB$; $\overline{DE}$ es perpendicular a $\overline{OD}$, y $\overline{OE}$ es la bisectriz del ángulo $\angle COD$; $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{OE}$, y $\overline{OF}$ es la bisectriz del ángulo $\angle COE$; y $\overline{FG}$ es perpendicular a $\overline{OF}$.

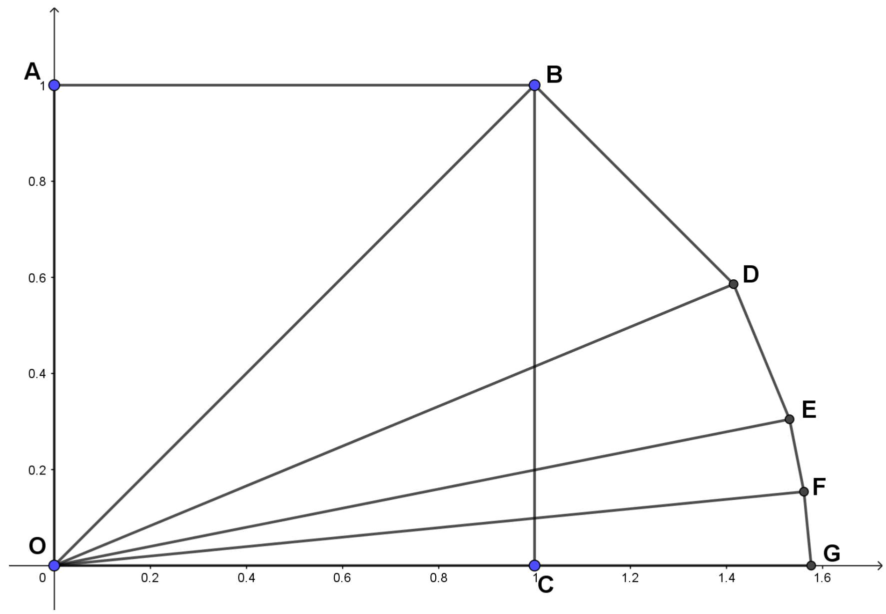


Figura 2.48

Entonces la longitud del segmento $\overline{OG}$ es aproximadamente igual a:

A) $\frac{3\pi}{8}$

B) $\frac{13\pi}{32}$

C) $\frac{7\pi}{16}$

D) $\frac{\pi}{2}$

Sugerencia: Utilizar en el proceso de solución la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$$

Solución:

Se calcula la diagonal $\overline{OB}$ del cuadrado aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{OC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

En seguida se obtiene el segmento $\overline{OD}$ del triángulo $\triangle BOD$ empleando la identidad del coseno de un ángulo mitad:

$$\overline{OD}=\frac{\overline{OB}}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\overline{OB}}{\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Ahora se obtiene el segmento $\overline{OE}$ del triángulo ΔDOE con el mismo procedimiento anterior:

$$\overline{OE}=\frac{\overline{OD}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)}=\frac{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}$$

A continuación se calcula análogamente el segmento $\overline{OF}$ del triángulo $\sphericalangle EOF$:

$$\overline{OF}=\frac{\overline{OE}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{32}\right)}=\frac{\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}}$$

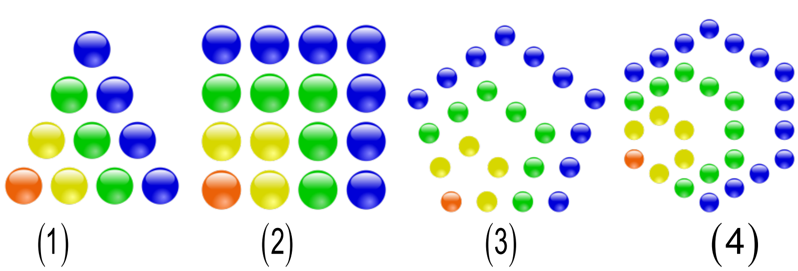
Finalmente se calcula el segmento $\overline{OG}$ del triángulo $\sphericalangle FOG$:

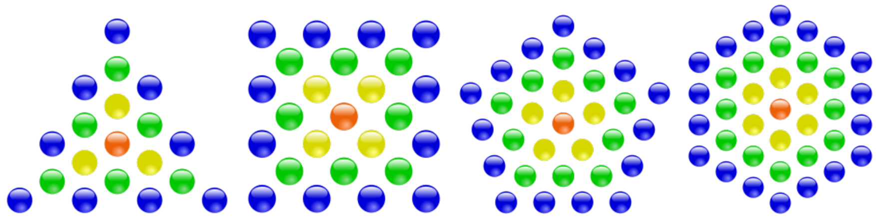
$$\overline{OG}=\frac{\overline{OF}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{32}\right)}=\frac{16\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}$$

Pero $\dfrac{16\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}\approx 1.5759$ y $\dfrac{\pi}{2}\approx 1.5708$

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

Situación 8. El maravilloso mundo de los números.
El fascinante país de los números, la Aritmética, se organiza en diferentes provincias cuyos habitantes, los números, tienen características especiales y se relacionan de forma peculiar. Los números que se tratarán, llamados polinomiales o figurados, forman una ciudad aritmética que invita al análisis y a la reflexión con el objetivo de determinar las regularidades y los patrones que los norman. Se invita a aventurarse por la senda en que desfilan estos números.





(5) (6) (7) (8)

Figura 2.49 Números figurados o polinomiales
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_figurado

Se llaman números triangulares aquellos números naturales que, representados gráficamente, toman la apariencia de triángulos de diversos tamaños, según el número de bolitas que los forman. En la figura 2.49-(1) se muestra un arreglo triangular de bolitas de diferentes colores, que permiten distinguir todos los triángulos equiláteros que viven en la figura, según el número de bolitas por cada lado.

8.1 Partiendo del análisis de esta figura, se deduce que el número de bolitas del triángulo equilátero que se puede formar con lados de diez bolitas es:

A) 78
B) 66
C) 55
D) 45

Solución:
Considerando la figura 2.49-(1):

Figura 2.49-(1)

Para distinguir los diferentes triángulos de la figura, se debe observar el número de bolitas que tienen por lado.
En el primer triángulo sólo hay una bolita, la de color rojo, que se asocia con el número triangular 1.
En el segundo triángulo hay dos bolitas por lado, una roja con una amarilla, o dos amarillas, que se asocia con el número triangular 3 porque se pueden contar tres bolitas en el triángulo.
En el tercer triángulo hay tres bolitas por lado, una roja con una amarilla y una verde, o tres verdes, que se asocia con el número triangular 6, porque se pueden contar seis bolitas en el triángulo.

Y en el cuarto triángulo hay cuatro bolitas por lado, una roja con una amarilla, una verde y una azul, o cuatro azules, que se asocia con el número triangular 10, porque se pueden contar diez bolitas en el triángulo.
Con esta información se construye la tabla (2.7):

Triángulo	No. Bolitas por lado	No. Total de bolitas
T_1	1	1
T_2	2	3
T_3	3	6
T_4	4	10

Tabla (2.7)

De la tabla se deducen dos sucesiones de números, la del número de bolitas por lado de los triángulos: $1, 2, 3, 4$, y la del número total de bolitas por cada triángulo: $1, 3, 6, 10$. Si se establece una correspondencia entre estas dos sucesiones:

$$1 \leftrightarrow 1$$
$$2 \leftrightarrow 3$$
$$3 \leftrightarrow 6$$
$$4 \leftrightarrow 10$$

Se puede observar que cada número de la sucesión $1, 3, 6, 10$, se obtiene de la suma de los números de la sucesión $1, 2, 3, 4$, desde el primero que es 1, hasta el que corresponde con el número de la sucesión $1, 3, 6, 10$. Así se deduce la siguiente regularidad:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Entonces el número de bolitas del arreglo triangular con diez bolitas por lado será igual al resultado de sumar la siguiente sucesión:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Respuesta correcta: **C)** $\mathbf{55}$

8.2 Considerando el mismo arreglo triangular de la figura 2.49-(1), determinar el patrón para obtener el número de bolitas del triángulo con n bolitas por lado.

A) $\frac{n(n-1)}{2}$

B) $\frac{n(3n-1)}{2}$

C) $\frac{n(3n+1)}{2}$

D) $\frac{n(n+1)}{2}$

Solución:
Considerando la regularidad descrita en el reactivo anterior, el patrón se determina calculando la suma de la siguiente sucesión:

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n-2, n-1, n$$

Se establece la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow 1 \\ 2 \leftrightarrow 3 \\ 3 \leftrightarrow 6 \\ 4 \leftrightarrow 10 \\ 5 \leftrightarrow 15 \\ \vdots \qquad \vdots \\ n \leftrightarrow ? \end{array}$$

De donde se deduce la siguiente regularidad:

$$\begin{array}{l} 1 = 1 \\ 1+2 = 3 \\ 1+2+3 = 6 \\ 1+2+3+4 = 10 \\ 1+2+3+4+5 = 15 \\ 1+2+3+4+5+6 = 21 \\ \qquad\qquad \vdots \\ 1+2+3+4+5+6+\cdots+n = ? \end{array}$$

Para obtener el patrón de la regularidad, es necesario calcular la suma de los números naturales desde 1 hasta n, llamada suma gaussiana en honor al príncipe de las matemáticas Carlos Friedrich Gauss. Para obtenerla se ejecuta el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{rl} S = 1 & + \; 2 \; + \; 3 \; + \cdots + (n-2) + (n-1) + \; n \\ S = n & + (n-1) + (n-2) + \cdots + \; 3 \; + \; 2 \; + \; 1 \\ \hline 2S = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1) \end{array}$$

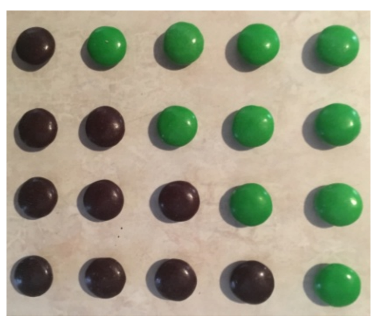
Este procedimiento consiste en obtener dos veces la suma de los primeros n números naturales ordenados primero en forma creciente y después en forma decreciente. Entonces el resultado se puede expresar así:

$$2S = n(n+1)$$

Y despejando S, se obtiene el patrón de la regularidad de los números triangulares:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

La figura 2.50 muestra el arreglo de las bolitas de dos triangulares que justifican esquemáticamente el resultado anterior:



$n = 4$

$(n+1) = 4+1$

Figura 2.50

En la figura 2.50 se forma un rectángulo con dos arreglos triangulares, tal que el área de uno de los triángulos será igual a la mitad del área del rectángulo:

$$T_4 = \frac{Ancho \times Largo}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

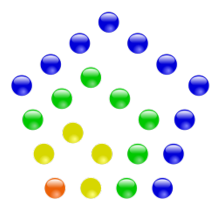
Y 10 es el número de bolitas de cada arreglo triangular de la figura 2.50.

Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}$

8.3 Se llaman números pentagonales aquellos números naturales que, representados gráficamente, toman la apariencia de pentágonos de diversos tamaños, según el número de bolitas que los forman. En la figura 2.49-(3) se muestra un arreglo pentagonal de bolitas de diferentes colores, que permiten distinguir todos los pentágonos regulares que viven en la figura, según el número de bolitas por cada lado. Partiendo del análisis de esta figura, se deduce que el número de bolitas del pentágono regular que se puede formar con lados de ocho bolitas es:

A) 117
B) 92
C) 70
D) 51

Solución:
Considerando la siguiente figura:



Para distinguir los diferentes pentágonos de la figura, se debe observar el número de bolitas que tienen por lado.
En el primer pentágono sólo hay una bolita, la de color rojo, que se asocia con el número pentagonal 1.
En el segundo pentágono hay dos bolitas por lado, una roja con una amarilla, o dos amarillas, que se asocia con el número pentagonal 5 porque se pueden contar cinco bolitas en el pentágono.
En el tercer pentágono hay tres bolitas por lado, una roja con una amarilla y una verde, o tres verdes, que se asocia con el número pentagonal 12, porque se pueden contar doce bolitas en el pentágono.
Y en el cuarto pentágono hay cuatro bolitas por lado, una roja con una amarilla, una verde y una azul, o cuatro azules, que se asocia con el número pentagonal 22, porque se pueden contar veintidós bolitas en el pentágono.
Con esta información se construye la tabla (8):

Pentágono regular	No. Bolitas por lado	No. Total de bolitas
P_1	1	1
P_2	2	5
P_3	3	12
P_4	4	22

Tabla (2.8)

De la tabla se deducen dos sucesiones de números, la del número de bolitas por lado de los pentágonos: $1, 2, 3, 4$, y la de el número total de bolitas por cada pentágono: $1, 5, 12, 22$. Si se establece una correspondencia entre estas dos sucesiones:

$$\begin{gathered} 1 \leftrightarrow 1 \\ 2 \leftrightarrow 5 \\ 3 \leftrightarrow 12 \\ 4 \leftrightarrow 22 \end{gathered}$$

Se puede observar que cada número de la sucesión $1, 5, 12, 22$, se obtiene de la suma de los números de la sucesión $1, 2, 3, 4$, desde el primero que es 1, hasta el que corresponde (elevado al cuadrado), con el número de la sucesión $1, 5, 12, 22$. Así se deduce la siguiente regularidad:

$$\begin{aligned} &1^2 = 1 \\ &1 + 2^2 = 5 \\ &1 + 2 + 3^2 = 12 \\ &1 + 2 + 3 + 4^2 = 22 \end{aligned}$$

Entonces el número de bolitas del arreglo pentagonal con ocho bolitas por lado será igual al resultado de sumar la siguiente sucesión:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8^2 = 92$$

Respuesta correcta: **B) 92**

8.4 Considerando el mismo arreglo pentagonal de la figura 2.49-(3), determinar el patrón para obtener el número de bolitas del pentágono con n bolitas por lado.

A) $\dfrac{n(3n-1)}{2}$

B) $\dfrac{n(5n-1)}{2}$

C) $\dfrac{n(3n+1)}{2}$

D) $\dfrac{n(5n+1)}{2}$

Solución:
Considerando la regularidad descrita en el reactivo anterior, el patrón se determina calculando la suma de la siguiente sucesión:

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots, n-2, n-1, n^2$$

Se establece la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned}
&1 \leftrightarrow 1\\
&2 \leftrightarrow 5\\
&3 \leftrightarrow 12\\
&4 \leftrightarrow 22\\
&5 \leftrightarrow 35\\
&\vdots \qquad \vdots\\
&n \leftrightarrow ?
\end{aligned}$$

De donde se deduce la siguiente regularidad:

$$\begin{aligned}
&1^2 = 1\\
&1+2^2 = 5\\
&1+2+3^2 = 12\\
&1+2+3+4^2 = 22\\
&1+2+3+4+5^2 = 35\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&1+2+3+4+5+\cdots+n^2 = ?
\end{aligned}$$

Para obtener el patrón de la regularidad, es necesario calcular la suma de los números naturales desde 1 hasta $n-1$, y sumarle el cuadrado del último número natural de la sucesión, como se describe en seguida:

La suma de los números naturales desde 1 hasta $(n-1)$, se obtiene empleando el patrón del reactivo anterior sustituyendo $(n-1)$ en el lugar de n :

$$\frac{\mathrm{n}(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Si al resultado anterior se suma n^2, se obtiene el patrón de la regularidad de los números pentagonales:

$$\frac{(n-1)n}{2} + n^2 = \frac{(n-1)n+2n^2}{2} = \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Comprobación:

Si $n=1$, entonces $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{1(3(1)-1)}{2} = 1$

Si $n=2$, entonces $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{2(3(2)-1)}{2} = 5$

Si $n=3$, entonces $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3(3(3)-1)}{2} = 12$

Si $n=4$, entonces $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{4(3(4)-1)}{2} = 22$

Que son los cuatro primeros números pentagonales de la figura 2.49-(3).

Respuesta correcta: **A)** $\dfrac{n(3n-1)}{2}$

Situación 9. ¿Puede ser nada un número?

El cero es un número muy importante, sin el concepto que representa y las propiedades que lo sustentan, las Matemáticas no serían lo que son. Cualquiera que quiera hacer Matemáticas necesita el cero. Pero, ¿quién inventó el cero?, para saberlo es importante antes saber qué es el cero. El cero es varias cosas a la vez: en primer lugar, el cero representa una cantidad nula, la nada, es decir, cuando no se tiene qué contar, de ello se deriva su primer uso por civilizaciones como la egipcia, la babilónica, la romana, la inca y la maya. Sin embargo, uno de los inventos más importantes son los sistemas de numeración posicionales, los babilonios usaron un sistema de numeración posicional de base 60, cada posición numérica valía sesenta veces más que la anterior, y usaron al principio un espacio para indicar el cero posicional, más tarde usaron un símbolo. Los mayas eran muy buenos contando, tenían una técnica matemática muy potente con su sistema de numeración posicional de base veinte muy avanzado, con uso del cero. Pero el cero es algo más, es un número sometido a las reglas de las operaciones como todos los números, no sólo ayudó a contar con los sistemas posicionales, sino que forma parte de la Aritmética a partir del siglo séptimo de nuestra era en la India, de la mano de Brahmagupta que lo incluyó en las operaciones con números positivos y negativos, con lo que el cero alcanzó la categoría de número.

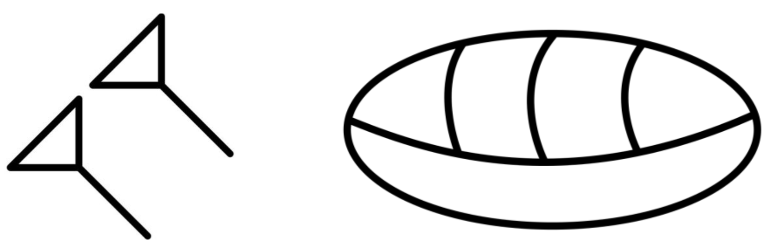


Figura 2.51 El cero de los Babilonios y los Mayas
https://www.google.com/search?q=el+cero&tbm=isch&source=lnt&tbs=sur:fc&sa=X&ved=0ahUKEwint5369KPlAhWEup4KHShKB10QpwUIIw&biw=1152&bih=562&dpr=1.25

9.1 En la mayoría de los aspectos, el cero se comporta como cualquier otro número, sin embargo, es especial. Seleccionar la opción que indica la propiedad del cero que justifica la validez del siguiente cálculo extraño:

“Un gato tiene una cola.
No hay gatos sin colas.
Por lo tanto, un gato no tiene dos colas”

A) Es el inverso aditivo
B) Es el neutro multiplicativo
C) Es el inverso multiplicativo
D) Es el neutro aditivo

Solución:

El cero es el único número que está atrapado entre los números positivos y los números negativos, por eso es especial. Está claro que sumando cero a cualquier número, no lo cambia. Por ejemplo, si se tienen tres conejos y se les suma cero conejos, se siguen teniendo tres conejos. Esta propiedad indica que el cero es el idéntico aditivo, es decir, para todo número a, $a+0=0=0+a$.

Respuesta correcta: **D) Es el neutro aditivo**

9.2 ¿Qué ocurre con la división entre cero? Dividir cero entre un número distinto de cero es sencillo: se obtiene cero. Por ejemplo, la mitad de nada es nada. Pero cuando se trata de dividir un número entre cero, sale a relucir la naturaleza inusual del cero. Si se tiene que $\frac{m}{n}=q$, para todo $m\neq 0$ y $q\neq 0$ la justificación es que $nq=m$, sin embargo, si $n=0$, $nq=m\Rightarrow(0)(q)=0$, lo cual invalida que $\frac{m}{n}=q$. Por lo tanto, no existe número q que, multiplicado por cero, sea igual a $m\neq 0$.

En la siguiente paradoja, parece que lo dicho anteriormente no es cierto, determinar el error que se comete para llegar a tal conclusión:

$$\frac{0}{0}=\frac{81-81}{81-81}$$
$$\frac{0}{0}=\frac{9^2-9^2}{9^2-9^2}$$
$$\frac{0}{0}=\frac{(9+9)(9-9)}{(9)(9-9)}$$
$$\frac{0}{0}=\frac{9+9}{9}$$
$$\frac{0}{0}=\frac{18}{9}$$
$$\frac{0}{0}=2$$

A) $\frac{m}{m}=1,$ para toda m

B) $(m)(0)=0,$ para toda m

C) $\frac{0}{m}=0,$ para toda m

D) Si $\left(\frac{m}{m}\right)n=\left(\frac{m}{m}\right)q\Rightarrow n=q,$ para toda m

Solución:

Analizando el desarrollo, para obtener a partir de $\frac{0}{0}=\frac{(9+9)(9-9)}{(9)(9-9)}$, la expresión $\frac{0}{0}=\frac{9+9}{9}$, se simplificó $\frac{(9-9)}{(9-9)}$, suponiendo que su valor es 1. Por lo tanto, el error es considerar que $\frac{m}{m}=1,$ para toda m, lo cual es falso si $m=0$

Respuesta correcta: **A) $\frac{m}{m}=1$, para toda m**

9.3 ¿Es el cero un número par o no? La propiedad que da respuesta correcta a esta pregunta es:

A) 0 es número impar
B) 0 es número que no es par ni impar
C) 0 es número par
D) 0 es número es par e impar

Solución:
Los números naturales pares son aquellos que al dividirlos entre dos, tienen residuo cero. Esto ocurre con el cero:

$$2\overline{\smash{)}0}\quad \text{cociente } 0,\ \text{residuo } 0$$

Entonces el cero es número par.

Respuesta correcta: **C) 0 es número par**

9.4 En la operación $(2a3)(21)=4263$ para que la igualdad sea verdadera, el valor de a es:
A) 2
B) 1
C) 0
D) 3

Solución:
Al ejecutar la operación $(2a3)(21)=4263$ se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2a3 \\ \times\quad 21 \\ \hline 2\,a3 \\ 42a6 \\ \hline 4\,2\,63 \end{array}$$

De donde se debe cumplir que:

$$a+6=6----(1)$$
$$2+2a=2---(2)$$

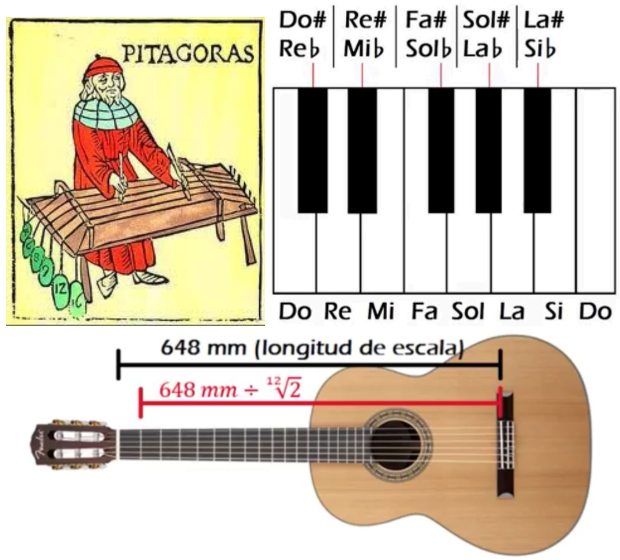
Entonces las expresiones (1) y (2) se satisfacen si $a=0$

Respuesta correcta: **C)** $\boldsymbol{a=0}$

Situación 10. La armonía musical ante lo inconmensurable.

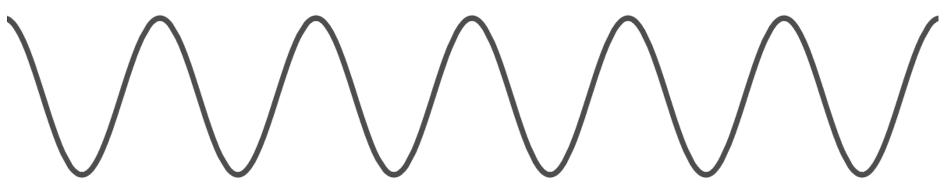
El gran matemático, y filósofo, *Gottfried Wilhelm Von Leibniz,* dijo en una ocasión: **La música es *el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando*.** Obviamente se debe entender esta afirmación en el marco de la estrecha relación existente entre música y matemáticas, pues son muchas y verdaderamente fascinantes las conexiones que hay entre ellas: las relaciones entre los sonidos de un acorde, los fenómenos de resonancia, las claves secretas de la partitura, el compás, las métricas, los ritmos, los intervalos, las estructuras geométricas, la relación entre armonía y número que tanto asombró a los pitagóricos, o las ingeniosas técnicas de repetición y traslación empleadas por Bach, Mozart y otros muchos compositores en sus obras maestras.

Las reflexiones teóricas sobre la armonía musical se remontan a la escuela pitagórica, en la que comprobaciones empíricas condujeron a una matematización del problema de construir una escala, es decir, un conjunto de notas que forman intervalos armoniosos entre ellas. Los pitagóricos notaron que la altura del sonido producido por una cuerda estaba ligada a la longitud de ésta. En el lenguaje moderno, escogida una longitud de referencia, la cuerda de esa longitud vibra en una determinada frecuencia f que es correspondiente con el número de oscilaciones de la cuerda en un segundo (se mide en Hertz). Una cuerda dos veces más corta hace oír un sonido en la frecuencia $2f$, una cuerda tres veces más corta en la frecuencia $3f$, y así sucesivamente. Las frecuencias $2f$, $3f$, $4f$, etc. son los **armónicos** del sonido fundamental f, es decir, sus múltiplos enteros positivos. Hacer oír simultáneamente la frecuencia f y una de sus armonías es **armonioso** en el sentido de que hay un vínculo físico directo entre ambas frecuencias, es decir, entre los dos sonidos.



http://losrelatosdesamid.blogspot.com/2014/04/pitagoras-la-musica-y-las-matematicas.html
https://www.youtube.com/watch?v=WyncfQj8UJc
https://www.youtube.com/watch?v=L96LziNG4k0
Figura 2.52

La frecuencia fundamental, es el tono puro, es decir, una **onda simple** en la que la presión acústica varía en posición y tiempo de forma sinusoidal, o sea, de forma continua y periódica. En música, la frecuencia fundamental determina el **tono** de una nota. Como ejemplo, si se piensa en un objeto susceptible de vibrar como las cuerdas de una guitarra, la frecuencia fundamental será la más baja frecuencia a la que esa cuerda puede vibrar estacionariamente. Las ondas complejas como el habla y la música, están formadas por la superposición de múltiples ondas simples. El sonido es una vibración que se propaga por medio de ondas a través del aire que es un medio elástico. ¿Cómo se relacionan las propiedades de las ondas con las características del sonido?, en la figura 2.53 se observa una onda de sonido puro representada mediante una función sinusoidal:



$$\rho(t) = asin(2\pi ft)$$

Figura 2.53

Los parámetros que pueden variar en esta función son el a que incide en la amplitud de la onda y que está relacionada con el aumento o disminución del **volumen** del sonido, a mayor amplitud, mayor será el volumen del sonido, y el parámetro f que incide en la frecuencia de la onda y que está asociada con el **tono** del sonido que cambia de valores graves a agudos, es decir, a mayor frecuencia el sonido es más agudo y a menor frecuencia el sonido es más grave.

¿Por qué es tan distinto el sonido, aunque tenga la misma intensidad y el mismo tono en los diversos instrumentos musicales?, esto se debe a la característica del sonido llamado **timbre**, que es la suma de las intensidades con que resuenan la frecuencia fundamental y todos los armónicos en el cuerpo o caja de resonancia de los distintos instrumentos musicales.

Respecto a la resonancia es importante mencionar que no debe confundirse con la reverberación que es el fenómeno acústico de reflexión cuando un frente de onda incide sobre las paredes, el techo y el piso de un recinto cerrado al producirse un sonido. Resonancia es la transmisión de una vibración de un cuerpo a otro si coinciden sus frecuencias o sus armónicos.

10.1 Las cuerdas, como las de una guitarra, un violín, entre otros instrumentos, tienen modos de vibración llamados armónicos. Se presentan algunos de ellos en la siguiente figura 2.54:

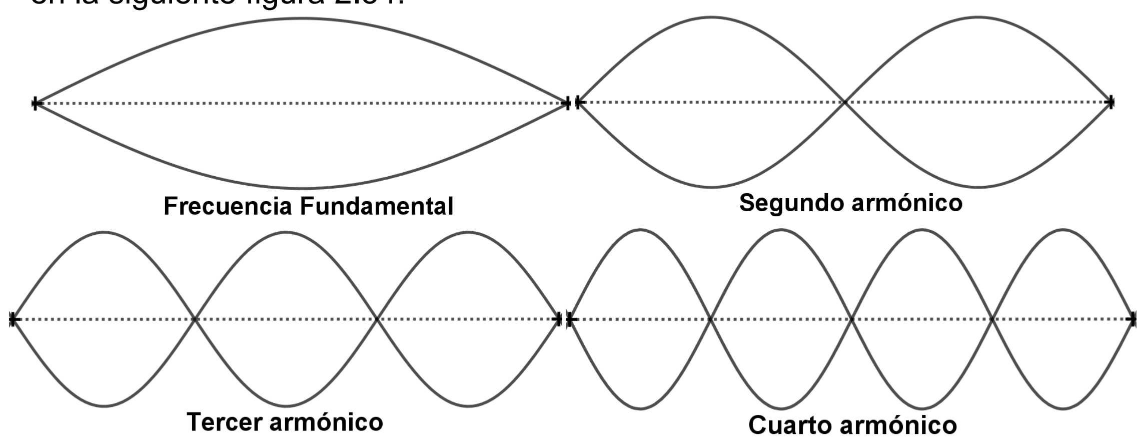


Figura 2.54

El armónico fundamental vibra a una cierta frecuencia f, dependiendo de la nota o tono que determina, el segundo armónico vibra al doble de esa frecuencia $2f$, el tercer armónico vibra al triple de esa frecuencia $3f$, y así sucesivamente. Cuando se toca una cuerda se están haciendo vibrar todos sus armónicos a la vez, pero todos con una amplitud distinta, y cuando la mezcla de estos armónicos llega al oído se escucha el sonido de una onda compleja.

Considerando que una cuerda de violín de longitud L vibra con una frecuencia fundamental de amplitud $a=1$, su segundo armónico con una amplitud $a=\frac{1}{2}$, su tercer armónico con una amplitud $a=\frac{1}{4}$ y su cuarto armónico con una amplitud $a=\frac{1}{8}$, como se muestra en la siguiente figura 2.55:

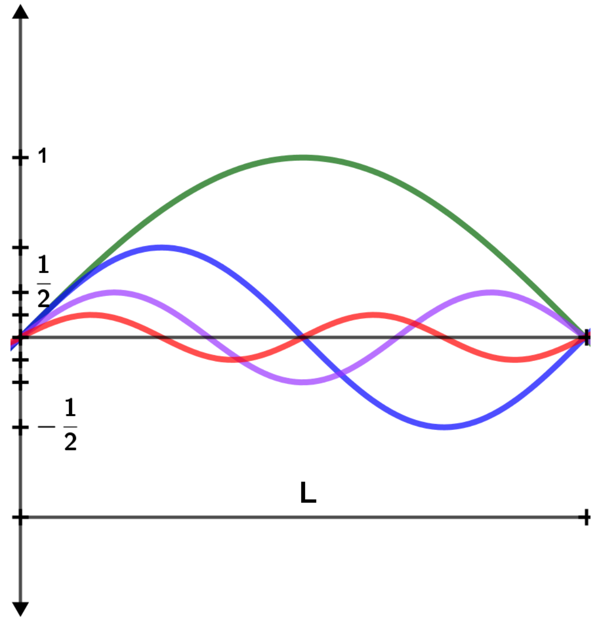
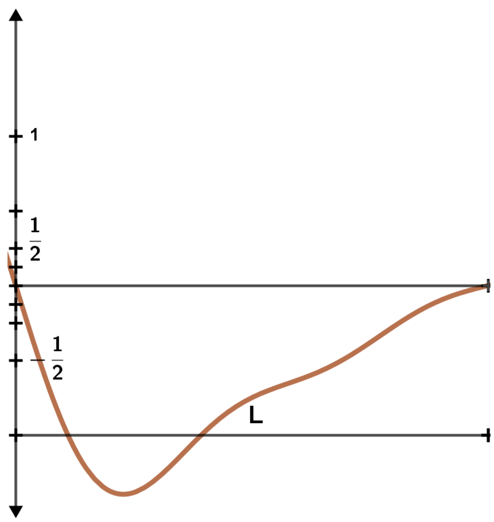


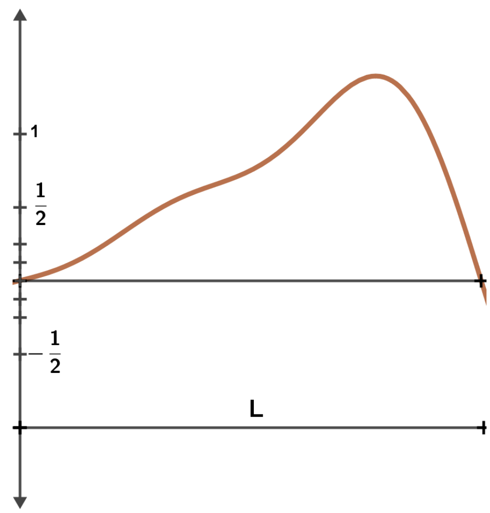
Figura 2.55

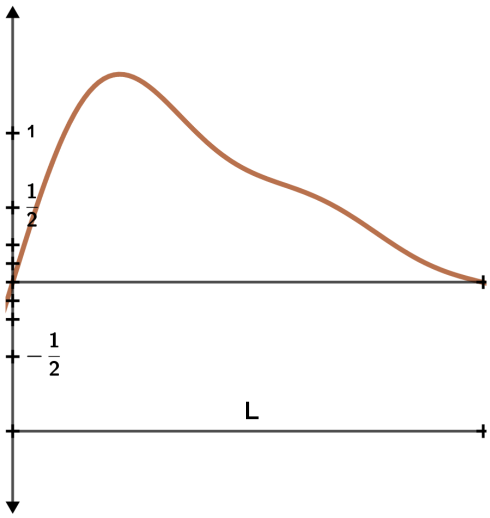
La onda compleja de sonido que escucha el oído es:

A)

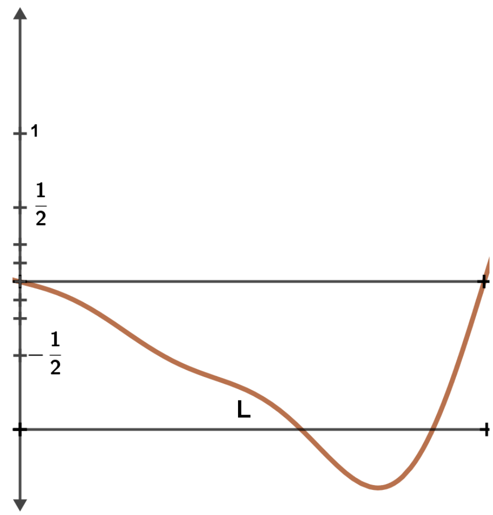


B)



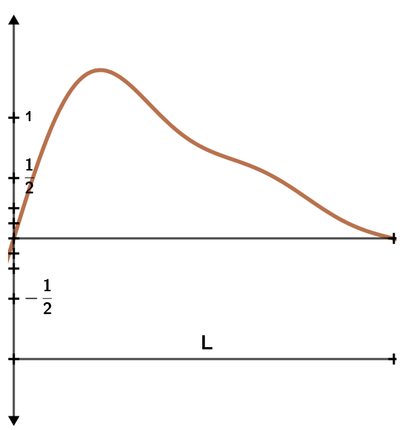


C)



D)

Solución:
De la gráfica de la figura 2.55 se observa que del inicio de la cuerda hasta la mitad de su longitud las ondas de la frecuencia fundamental y de su segundo armónico se localizan por arriba del eje de la cuerda, su tercer armónico en un tercio de la longitud de la cuerda se localiza por arriba del eje de la cuerda, y su cuarto armónico en un cuarto de la longitud de la cuerda también se localiza por arriba del eje de la cuerda. Esto significa que la máxima amplitud de la onda compuesta debe localizarse precisamente a la izquierda de la mitad de la longitud L de la cuerda, donde las amplitudes se suman, y que la onda compuesta debe ser creciente, por lo menos hasta un sexto de la longitud de la cuerda, donde predomina el efecto de la suma de las amplitudes de la frecuencia fundamental, del segundo y del tercer armónico. En la segunda mitad de la longitud de la cuerda, unas ondas se localizan por arriba del eje de la cuerda y otras por debajo, por lo que la suma de las amplitudes de las ondas por debajo se resta de la suma de las amplitudes de las ondas por arriba de dicho eje, lo que provoca que la amplitud de la onda compleja disminuya continuamente en esa zona de la cuerda. Derivado de este análisis, se concluye que la onda compleja correspondiente se ilustra en el inciso C).



Respuesta correcta: **C)**

10.2 Si la longitud L de una cuerda se divide a la mitad, los sonidos que producen ambas cuerdas simultáneamente son consonantes (agradables al oído) porque tienen armónicos en común, la única diferencia es que la cuerda de longitud L emite un sonido grave de frecuencia f y la cuerda de longitud $\frac{L}{2}$ emite un sonido más agudo de frecuencia $2f$. Si la cuerda de longitud $\frac{L}{2}$ se divide nuevamente a la mitad para producir una longitud $\frac{L}{4}$, el sonido que emite es aún más agudo de frecuencia $4f$ y sucede el mismo efecto en el sonido simultáneo de ambas cuerdas. Las cuerdas de longitudes $\frac{L}{4}$ y $\frac{L}{2}$ se denominan octavas de la cuerda de longitud L. Si este proceso continúa realizándose, los sonidos serán cada vez más agudos, pero con la misma tonalidad. Si el proceso se invierte, duplicando las longitudes (lo que implica que las frecuencias se reducen a la mitad), el efecto es inverso, es decir, se producen sonidos más graves pero en la misma tonalidad. En resumen, con estos procesos se escucha la misma nota, pero en distintas octavas.

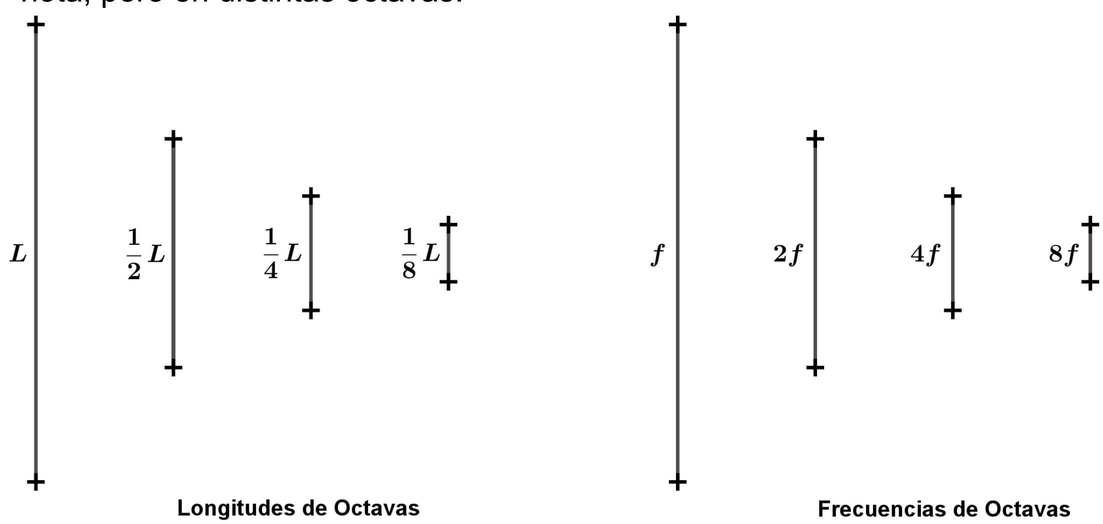


Figura 2.56

A pesar de esta armonía, no se produce riqueza musical en este proceso.

Existe otra forma de producir sonidos, y consiste en dividir la longitud L de la cuerda por dos tercios. Los sonidos que producen simultáneamente ambas cuerdas de longitudes L y $\frac{2}{3}L$ y frecuencias f y $\frac{3}{2}f$, también son agradables para el oído humano, pero en este caso algunos armónicos coinciden y otros no, por lo que los tonos de estas cuerdas son diferentes. Si la cuerda de longitud $\frac{2}{3}L$, se divide nuevamente a las dos terceras partes para producir una longitud $\frac{4}{9}L$ y un sonido de frecuencia $\frac{9}{4}f$, sucede el mismo efecto en el sonido simultáneo de ambas cuerdas. Las cuerdas de longitudes $\frac{4}{9}L$ y $\frac{2}{3}L$ se denominan quintas de la cuerda de longitud L. Entonces se pueden generar todas las quintas que se deseen sólo multiplicando o dividiendo las longitudes por dos tercios. El mismo efecto se produce si se hace lo mismo con la frecuencia de vibración de las cuerdas:

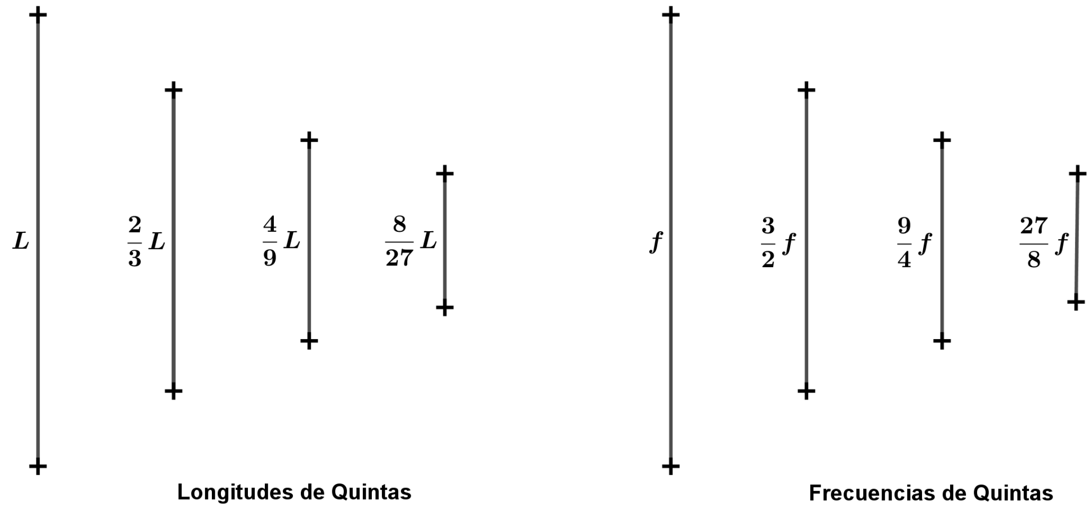


Figura 2.57

Considerando que la frecuencia en la escala temperada de la nota $La_4 = 440\,hrtz$, calcula la frecuencia en hercios de la nota $\mathrm{Re\#}_2$.

A) $1244.51\,hrtz$

B) $77.78\,hrtz$

C) $69.30\,hrtz$

D) $1396.91\,hrtz$

Solución:

Tomando como base la frecuencia de la nota La_4 en la cuarta octava que es de $440\ hertz$ en la escala temperada (o de igual temperamento), que es la que se utiliza comúnmente en la actualidad, y que divide a una octava en doce semitonos iguales: $Do\ Do_\#\ \mathrm{Re}\ \mathrm{Re}_\#\ Mi\ Fa\ Fa_\#\ Sol\ Sol_\#\ La\ La_\#\ Si$, es necesario considerar que la frecuencia del semitono siguiente se obtiene multiplicando la frecuencia conocida por $\sqrt[12]{2}$ y así sucesivamente; y la frecuencia del semitono anterior, se obtiene dividiendo la frecuencia conocida entre $\sqrt[12]{2}$ y así respectivamente. También es importante considerar la octava en la que se ubica tanto el semitono de frecuencia conocida como el semitono cuya frecuencia se desea conocer, ya que entre octavas consecutivas la frecuencia se duplica, o se reduce a la mitad, es decir, si

$La_4 = 440\,hertz$, entonces $La_5 = 880\,hertz$ y $La_3 = 220\,hertz$. Observa que el subíndice indica la octava en la que se localiza el semitono.
Con esta información, se puede deducir que para obtener la frecuencia de la nota $\mathrm{Re\#}_2$ se cuentan los semitonos que existen con la nota de referencia $La_4 = 440\,hertz$, y se multiplica o divide esta última frecuencia por una potencia de base $\sqrt[12]{2}$ y exponente entero positivo o entero negativo, dependiendo de si la nota que interesa se localiza después o antes de la nota de referencia, en la misma octava o en otra octava.
En este caso $\mathrm{Re\#}_2$ se localiza antes y en otra octava de la nota de referencia $La_4 = 440\,hertz$. Se muestra en la tabla 2.9 la posición relativa de ambas notas:

	Notas de la escala temperada											
2ª Octava	Do2	Do#2	Re2	**Re#2**	Mi2	Fa2	Fa#2	Sol2	Sol#2	La2	La#2	Si2
3ª Octava	Do3	Do#3	Re3	Re#3	Mi3	Fa3	Fa#3	Sol3	Sol#3	La3	La#3	Si3
4ª Octava	Do4	Do#4	Re4	Re#4	Mi4	Fa4	Fa#4	Sol4	Sol#4	**La4**	La#4	Si4

Tabla 2.9

Contando los semitonos o notas de derecha a izquierda y de abajo hacia arriba comenzando en la nota $Sol_{\#4}$ que se localiza a la izquierda de la nota La_4 y terminando en $\mathrm{Re\#}_2$ se obtienen 30 notas. Entonces la frecuencia buscada es:

$$\mathrm{Re\#}_2 = 440\left(\sqrt[12]{2}\right)^{-30} = \frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{30}} = 77.78\,hertz.$$

Respuesta correcta: **B)** $77.78\,hrtz$

10.3 Las guitarras están construidas para temperamento igual, de manera que los trastes en el mástil (ver la figura 2.58) se colocan de forma que las notas que se obtienen al pulsar en dos trastes consecutivos, tienen siempre un semitono de diferencia entre ellos.
Recordar que un semitono es un intervalo que corresponde a la doceava parte de una octava. La octava es el intervalo de ocho grados entre dos notas de la escala musical, como entre Do_2 y Do_3. No olvidar que también la octava es el intervalo entre dos notas cuando hay una relación de 2 a 1 entre sus frecuencias. En el caso de los instrumentos de cuerda, la octava es el intervalo que se obtiene entre la nota que da una cuerda tocada al aire y la misma cuerda dividida por la mitad (en el traste 12).

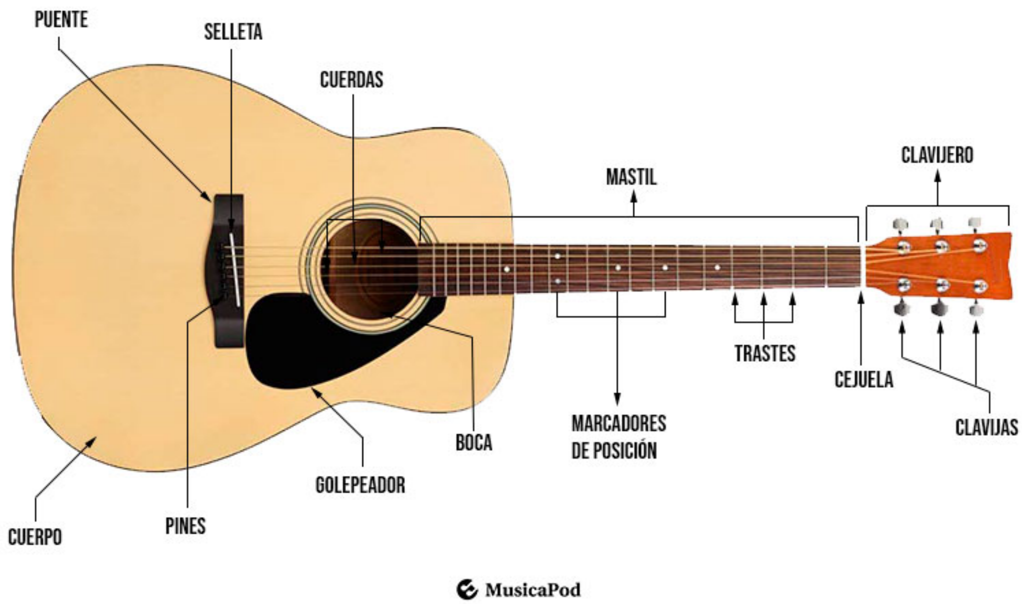


Figura 2.58
https://musicapod.com/partes-de-la-guitarra-acustica/

Si la longitud del puente a la cejuela también llamada longitud de escala, de una guitarra acústica Fender es de $25.5" = 647.7mm$, determinar la separación en milímetros entre el tercer y cuarto traste de la guitarra.

A) $34.31\ mm$

B) $32.39\ mm$

C) $30.57\ mm$

D) $28.85\ mm$

Solución:
Para determinar la separación entre el tercer y cuarto traste de la guitarra, es necesario considerar que como las guitarras son construidas a temperamento igual, entonces los trastes están espaciados a relaciones de raíz doceava de dos. Así entonces, primero se calculan las longitudes vibrantes de las cuerdas en el tercer y cuarto trastes dividiendo la longitud de escala entre la raíz doceava de dos elevada a la tercer y cuarta potencias respectivamente:

$$\frac{647.7}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^3}\,mm = 544.6486\,mm \text{ y } \frac{647.7}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^4}\,mm = 514.0798\,mm$$

Y para obtener la separación entre el tercer y cuarto traste de la guitarra se restan las longitudes vibrantes obtenidas:

$$544.6486\,mm - 514.0798\,mm = 30.5688\,mm \approx 30.57\,mm$$

Respuesta correcta: **C)** $30.57\ mm$

10.4 Identifica la fórmula para obtener la distancia d_n de la cejuela de una guitarra a cualquier traste en función de la longitud de escala L y del número de traste n de que se trate.

A) $d_n = \dfrac{L}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$

B) $d_n = \left(\dfrac{L}{\sqrt[12]{2}}\right)^n$

C) $d_n = L - \left(\dfrac{L}{\sqrt[12]{2}}\right)^n$

D) $d_n = L - \dfrac{L}{\sqrt[12]{2^n}}$

Solución:

Del ejercicio anterior se deduce que la expresión $\dfrac{L}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$ se emplea para obtener la longitud vibrante de las cuerdas en el traste n. Entonces si se resta a la longitud de escala L, la longitud vibrante de las cuerdas en el traste n, se obtiene la distancia de la cejuela al traste n.

Respuesta correcta: **D)** $d_n = L - \dfrac{L}{\sqrt[12]{2^n}}$

Situación 11. El misterio del número e

Las primeras referencias a la constante e fueron publicadas en 1618 en la tabla en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de John Napier.

Figura 2.59 John Napier 1550-1617
https://an.wikipedia.org/wiki/John_Napier

No obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. Se asume que la tabla fue escrita por William Oughtred. El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Jakob Bernoulli (figura 2.60), quien estudió un problema particular del llamado interés compuesto. Si se invierte una Unidad Monetaria (que se abreviará en lo sucesivo como UM) con un interés del 100% anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtendrán $2\,UM$. Si se pagan los intereses dos veces al año, dividiendo el interés entre 2, la cantidad obtenida es $1\,UM$ multiplicada por 1.5 dos veces, es decir, $1\,UM \times (1.5)^2 = 2.25\,UM$. Si se divide el año en cuatro períodos (trimestres), al igual que la tasa de interés, se obtienen $1\,UM \times (1.25)^4 = 2.44140625\,UM$. En caso de pagos mensuales el monto asciende a 1 UM x$1\,UM \times \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.61303...UM$. Por tanto, cada vez que se aumenta la cantidad de períodos de pago en un factor de n (que tiende a crecer sin límite) y se reduce la tasa de interés en el período, en un factor de $\frac{1}{n}$, el total de unidades monetarias obtenidas está determinado por la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bernoulli se dio cuenta de que esta expresión se aproxima al valor de $2.7182818...UM$. De aquí proviene la definición que se da del número e en finanzas que expresa que este número es el límite de una inversión de $1\,UM$ con una tasa de interés al 100% anual compuesto en forma continua. En general, una inversión que se inicia con un capital C y una tasa de interés anual i, proporcionará $Ce^i\,UM$ con interés compuesto.

Figura 2.60 Jakob Bernoulli 1654-1705
https://es.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli

El primer uso conocido de la constante, representado por la letra b, fue en una carta de Gottfried Leibniz a Christiaan Huygens (figura 2.61) en 1690 y 1691.

Figura 2.61 Gottfried Leibniz 1646-1716
https://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz

Leonhard Euler (figura 2.62) comenzó a utilizar la letra e para identificar la constante en 1727, y el primer uso de e en una publicación fue en Mechanica, de Euler, publicado en 1736. Mientras que en los años subsiguientes algunos investigadores usaron la letra c, pero e fue la más común, y finalmente se convirtió en la terminología usual hasta nuestros días.

Figura 2.62 Leonhard Euler 1707-1783
https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

El número e es un número irracional trascendente, es decir, es un número que no puede ser expresado como una fracción, que no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes enteros (o racionales) y por tanto no pueden expresarse mediante radicales. Fue el primer número trascendente en virtud del teorema de Lindemann–Weierstrass, que fue probado como tal, siendo dada su demostración por Charles Hermite en 1873. Además, el número e es un número real cuyas cifras en cualquier base siguen una distribución uniforme, siendo todas las cifras igualmente probables, así como todos los pares, tríos, etc. La parte decimal de este número es una sucesión infinita de dígitos. Su valor es:

$$e \approx 2.718281828459045235 4...$$

Hay muchas formas de definir o introducir el número e, por ejemplo:

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$$

Es la base de la función exponencial e^x y describe muchos fenómenos eléctricos, electrónicos, biológicos, mecánicos, químicos, etc., como la descarga de un condensador, la amplificación de corrientes en transistores BJT, la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil, el cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto, el crecimiento de células, la concentración de iones. También está el número e en la naturaleza, controla el ritmo de desintegración de los átomos, que se usa por ejemplo para datar acontecimientos usando el método del Carbono-14, como el tiempo en que alguien ha muerto, o la antigüedad de un fósil, etc.

11.1 Si se invierte $\$1'000\,000$ en BANSEFI que ofrece la mejor tasa de interés anual en una cuenta de ahorro en México y que es del 2.04% ,¿El mayor monto que se puede obtener a interés compuesto es?

A) $\$1'020\,609.50$

B) $\$1'020\,400.50$

C) $\$1'020\,591.83$

D) $\$1'020\,608.92$

Solución:

Para obtener el máximo monto M de la inversión a interés compuesto, tendrá que permanecer el dinero en el banco por un tiempo n indefinido, y se calcula con la expresión $M=C\left(1+\frac{i}{100p}\right)^{pn}$, donde C es el capital que se invierte, i es la tasa de interés anual, p es el número de periodos de capitalización en un año y n es el tiempo en años que dura la inversión. Sin embargo, esta fórmula se puede utilizar sólo cuando el tiempo de inversión n es finito. Para un tiempo infinito se cumple que $\left(1+\frac{i}{100p}\right)^{pn}=e^i$, así que la fórmula que se debe emplear es $M=Ce^i$:

Sustituyendo los datos en la fórmula se obtiene:

$$M=Ce^i=\$1'000\,000\left(2.71828182846\right)^{\frac{2.04}{100}}=\$1'020\,609.50$$

Respuesta correcta: **A)** $\$1'020\,609.50$

11.2 Un material que contiene núcleos atómicos inestables se considera radiactivo. La desintegración radiactiva es el proceso por el cual un núcleo atómico inestable pierde energía por emisión de radiación como partículas alfa, partículas beta, o rayos gamma. Este decrecimiento radiactivo se comporta bajo una función matemática que se debe conocer. Dicha función matemática que describe cómo va decayendo el número de núcleos activos que emiten radiactividad respecto al tiempo se conoce como ley de la desintegración radiactiva y tiene importantes aplicaciones; se muestra a continuación:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

donde N es el número de núcleos activos que depende del tiempo t; N_0 es el número de núcleos activos que hay al principio del análisis; $e \approx 2.7182818284...$ es la constante de Euler; y λ es la constante de desintegración radiactiva, e indica lo rápido que el número de núcleos radiactivos va decayendo. Se muestra la gráfica de esta ley en la figura 2.63:

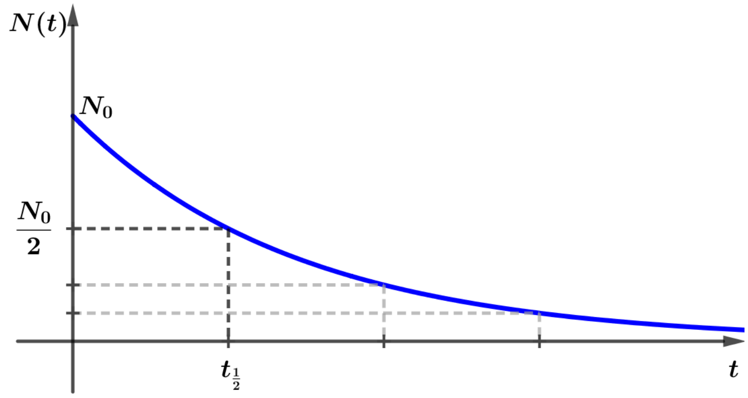


Figura 2.63

Una variable muy sencilla de entender es el periodo de semidesintegración denotado por $t_{\frac{1}{2}}$ y se interpreta como el tiempo que tarda una muestra radiactiva en reducir su número de núcleos activos a la mitad. En la gráfica de la figura 2.63 se observa que si un material tiene N_0 como el número de núcleos activos al inicio del análisis, entonces $\frac{N_0}{2}$ es la mitad de ese número, y el tiempo que tarda en reducirse N_0 a la mitad es $t_{\frac{1}{2}}$, llamado periodo de semidesintegración. Si transcurre otro periodo de semidesintegración, entonces el número de núcleos activos $\frac{N_0}{2}$ se reduce nuevamente a la mitad, es decir, $\frac{N_0}{4}$, y así sucesivamente si transcurren otros periodos de semidesintegración.

Por ejemplo, el periodo de semidesintegración del carbono catorce es de 5730 años, y el periodo de semidesintegración del uranio doscientos treinta y ocho es de $4'500\,000\,000$ años. Este periodo coincide aproximadamente con la antigüedad del planeta tierra, de manera que hay la mitad de núcleos activos de uranio de los que había cuando la tierra se formó.
Es importante mencionar que se puede relacionar la constante de desintegración radiactiva λ, con el periodo de semidesintegración radiactiva

$t_{\frac{1}{2}}$, sustituyendo en la ley de desintegración radiactiva $\frac{N_0}{2}$ y $t_{\frac{1}{2}}$ como se muestra:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$$

Se simplifica N_0:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$$

Como el tiempo t se localiza en el exponente, se aplica logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}\right)$$

Pero de la propiedad de los exponentes $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ se deduce que $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, entonces sustituyendo este resultado:

$$\ln\left(2^{-1}\right) = \ln\left(e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}\right)$$

Ahora aplicando la propiedad de los logaritmos $\log_a\left(M^n\right) = n\log_a\left(M\right)$ se obtiene:

$$-\ln(2) = -\lambda t_{\frac{1}{2}} \ln(e)$$

Y como $\ln(e) = 1$, se puede escribir:

$$-\ln(2) = -\lambda t_{\frac{1}{2}}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por -1:

$$\ln(2) = \lambda t_{\frac{1}{2}}$$

Finalmente despejando el tiempo $t_{\frac{1}{2}}$ se obtiene:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Es importante mencionar que, si el tiempo está dado en años, entonces la constante de desintegración radiactiva λ estará dada en años a la menos uno.

Una aplicación importante de la desintegración radiactiva es la técnica de datación por radiocarbono que permite medir la antigüedad de una muestra:

En 1988 tres laboratorios científicos independientes analizaron la tela de lino del Sudario de Turín, y encontraron que la cantidad del isótopo carbono catorce que permanecía en la tela era del 91% de la inicial, es decir, en el momento que se colocó sobre el cuerpo de Jesucristo para su entierro. Si el periodo de semidesintegración del carbono catorce es de 5730 años, ¿cuál fue la antigüedad que pronosticaron del Sudario?

A) $1986.7\ años$

B) $600.5\ años$

C) $779.6\ años$

D) $500.4\ años$

Solución:

Para determinar la antigüedad que se pronosticó, se empleará la ley de la desintegración radiactiva $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, sabiendo que N_0 era la cantidad de carbono catorce cuando se colocó en el cuerpo, $91\%N_0$ fue la cantidad que encontraron los laboratorios y $t_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln(2)}{\lambda}=5730\ años$ es el periodo de semidesintegración del carbono catorce:

Despejando λ de $\frac{\ln(2)}{\lambda}=5730\ años$ se obtiene:

$$5730\ años=\frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$$\lambda(5730\ años)=\ln(2)$$

$$\lambda=\frac{\ln(2)}{5730\ años}$$

Sustituyendo estos datos en la ley de desintegración radiactiva:

$$0.91(N_0)=N_0e^{-\left(\frac{\ln(2)}{5730\ años}\right)t}$$

Se simplifica N_0:

$$0.91=e^{-\left(\frac{\ln(2)}{5730\ años}\right)t}$$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\ln(0.91)=\ln\left(e^{-\left(\frac{\ln(2)}{5730\ años}\right)t}\right)$$

Y utilizando la propiedad $\log_a\left(M^n\right)=n\log_a(M)$ se puede escribir:

$$\ln(0.91)=-\left(\frac{\ln(2)}{5730\ años}t\right)\ln(e)$$

Como $\ln(e)=1$, entonces:

$$\ln(0.91)=-\frac{\ln(2)}{5730\ años}t$$

Y despejando el tiempo t se obtiene:

$$-\frac{\ln(2)}{5730\ años}t=\ln(0.91)$$

$$t=-\frac{\ln(0.91)(5730\ años)}{\ln(2)}$$

$$t\approx-\frac{(-0.0943106794712)(5730\ años)}{0.693147180560}$$

$$t\approx 779.6\ años$$

Observación: se utilizaron en el cálculo, todos los decimales que proporciona la calculadora para estimar los valores de los logaritmos, con la finalidad de obtener el resultado con una mejor aproximación redondeada a un decimal.

Respuesta correcta: **C)** $779.6\ años$

11.3 En el entorno cotidiano es posible encontrar un gran número de cuerdas, cadenas o cables sujetados en sus extremos y expuestos a la acción de la gravedad sobre su peso propio y formando una curva llamada catenaria. Durante mucho tiempo, matemáticos y físicos se preguntaron sobre qué forma tiene realmente esta curva y hasta 1646 se creía que ésta era una parábola. Pero el matemático holandés Christiaan Huygens con tan sólo 17 años dedujo que no era así, y más tarde en 1691 junto con Gottfried Leibniz y Johann Bernoulli descubrieron la ecuación de esta curva a la cuál llamaron catenaria, que proviene del griego catena o cadena. Estas curvas son muy especiales y aparecen a menudo en la naturaleza, debido a que es la curva ideal en la que se generan tensiones mínimas al ser sometidas a un campo gravitacional uniforme. Se pueden observar en la figura 2.64, que la curva esté en los hilos de seda generados por las arañas, en los cables de alta tensión soportados por torres, en las lianas o bejucos soportadas por árboles, etc.

Catenarias en la naturaleza
https://farm4.static.flickr.com/3611/3563118173_c4e1a7043a.jpg
Figura 2.64

Ecuación de la catenaria.
Tomando a como la distancia entre el punto más bajo de la curva catenaria y el nivel del suelo, su ecuación se define como:

$$f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Con esta información se plantea el siguiente problema:

Un cable de $100\,m$ de longitud, cuelga atados sus extremos a dos postes de $70\,m$ de altura, ver figura 2.65. Si la distancia entre el punto más bajo del cable que cuelga y el piso es de $20\,m$, ¿Cuál es la distancia que separa a los postes?

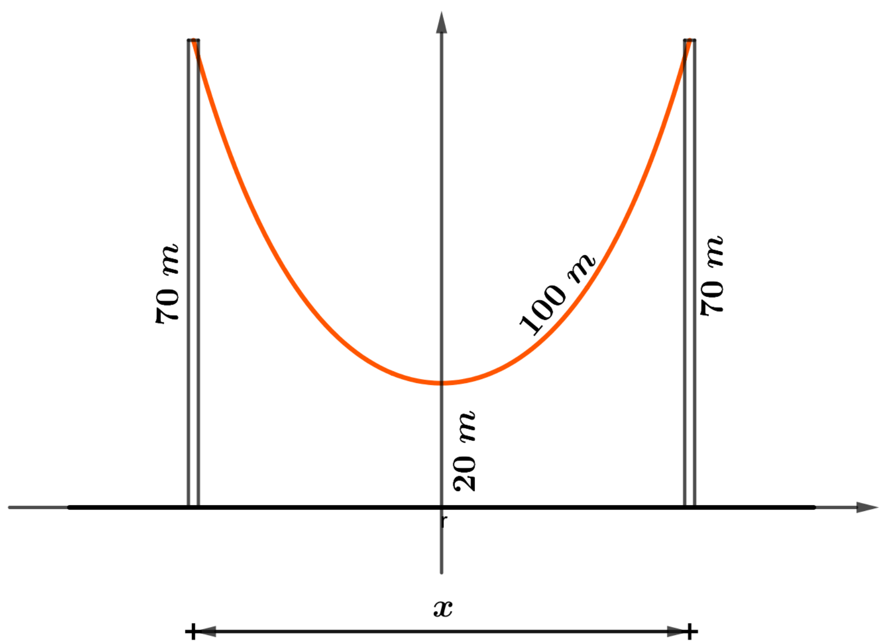


Figura 2.65

A) $70\,m$
B) $50\,m$
C) $25\,m$
D) $0\,m$

Solución:
Si la distancia entre el punto más bajo del cable que cuelga y el piso es de $20\,m$, como dicho punto está al centro de la catenaria, entonces la longitud del cable desde uno de sus extremos a ese punto central es la mitad de su longitud, es decir, $50\,m$ (observa la figura 2.66).

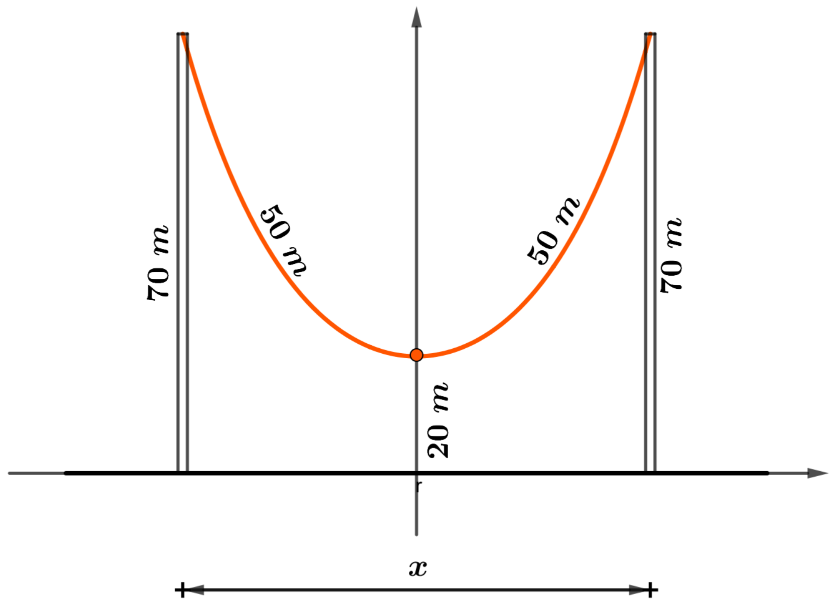


Figura 2.66

Ahora se debe observar que la suma de mitad de la longitud del cable más la distancia entre el punto más bajo del cable que cuelga y el piso es:

$$50\ m + 20\ m = 70\ m$$

Este resultado coincide con la altura de los postes, por lo tanto, para que se cumpla que la distancia del punto central del cable al piso sea de $20\ m$, dicho cable debe colgar verticalmente y doblado a la mitad, y esto se logrará sólo si los dos postes están localizados en la misma posición.
Entonces la distancia entre los postes es CERO, y el cable no describe una catenaria.

Respuesta correcta: **D)** $0\ m$

11.4 En un bosque tropical, cuelga una liana de dos árboles cuya especie se denomina **Swietenia macrophylla** (pueden medir hasta cincuenta metros de altura). La liana está apoyada a una misma altura en sus extremos, si el punto más bajo de la liana se ubica al centro del claro entre los dos árboles en un terreno horizontal, y se localiza a una altura de $2\ m$ con respecto al suelo, ¿a qué altura de los árboles se ubican los puntos de apoyo de la liana si están separados una distancia de $5\ m$?

A) $27.00\ m$
B) $12.26\ m$
C) $8.25\ m$
D) $3.78\ m$

Solución:
Para determinar la altura de apoyo en sus extremos de la liana, se debe considerar que describe una curva catenaria, así que se utiliza la ecuación $f(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Sustituyendo en ella $a=2\ m$ que es la altura del punto central de la liana con respecto al suelo y $x=\frac{5\ m}{2}$ que es la distancia horizontal del centro de la catenaria a cualquiera de los árboles en los que se apoya:

$$f(2.5)=\frac{2}{2}\left(e^{\frac{2.5}{2}}+e^{-\frac{2.5}{2}}\right)$$

$$f(2.5)=1\left(e^{1.25}+e^{-1.25}\right)$$

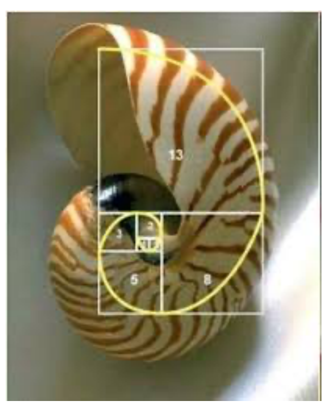
$$f(2.5)=e^{1.25}+e^{-1.25}$$

$$f(2.5)=3.78\ m$$

Respuesta correcta: **D)** $3.78\ m$

Situación 12. El fascinante número oro φ

Este número era conocido en la Grecia antigua con relación a los pentágonos regulares y el dodecaedro en la geometría euclidiana. Se asocia con la secuencia de los números de Fibonacci y explica algunos patrones curiosos en la estructura de plantas y flores. Recibió el nombre de "número de oro" entre 1826 y 1835. Es también llamado número áureo, tiene características matemáticas notables, incluyendo su vínculo con los números de Fibonacci ya citado y conexiones genuinas con el mundo real, así como con la numerología y la geometría de las plantas.



El número de oro y la proporción áurea
https://bit.ly/3J87awb
Figura 2. 67

Es un número irracional representado con la letra griega φ en honor al escultor griego Fidias, su valor numérico con cien decimales es:

$$\varphi = 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628$$
$$621354486227052604628189024497072072041893911375$$

Una característica distintiva de φ, es que, si calculamos su recíproco, se obtienen las mismas cifras después del punto decimal:

$$\varphi \approx 1.618034 \Rightarrow \frac{1}{\varphi} \approx 0.618034$$

Esto indica que se puede escribir la siguiente expresión:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Si se multiplican los dos miembros de la igualdad por φ se obtiene:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

que es una ecuación cuadrática cuya forma general es:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación con la fórmula general $\varphi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$, las soluciones son:

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(a)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Y se considera la solución positiva como el valor del número de oro:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Segmento áureo

Dado un segmento $\overline{AB}$ y un punto P de él tal que si x es la distancia entra A y P, y es la distancia entre P y B, se dice que $\overline{AP}$ es el segmento áureo de $\overline{AB}$ y $\overline{PB}$ es el segmento áureo de $\overline{AP}$ (ver la figura 2.68), si se cumple la proporción $\frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$. En términos de x y de y se obtiene:

$$\frac{x + y}{x} = \frac{x}{y}$$

Figura 2.68 Segmento áureo

A la razón $\frac{x}{y}$ se le denomina número de oro, es decir, φ.

En la proporción $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$ se realiza la división del miembro izquierdo de la igualdad y se obtiene:

$$\frac{x}{x}+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$$

Pero $\frac{x}{x}=1$ $\frac{y}{x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}$, así que la proporción se puede escribir como:

$$1+\frac{1}{\frac{x}{y}}=\frac{x}{y}$$

Si ahora se sustituye $\frac{x}{y}=\varphi$, se obtiene la ecuación $1+\frac{1}{\varphi}=\varphi \Rightarrow \varphi^2-\varphi-1=0$ que ya se resolvió anteriormente y cuya solución positiva es el valor del número de oro $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

12.1 En la siguiente construcción identifica el segmento áureo del segmento denotado por a:

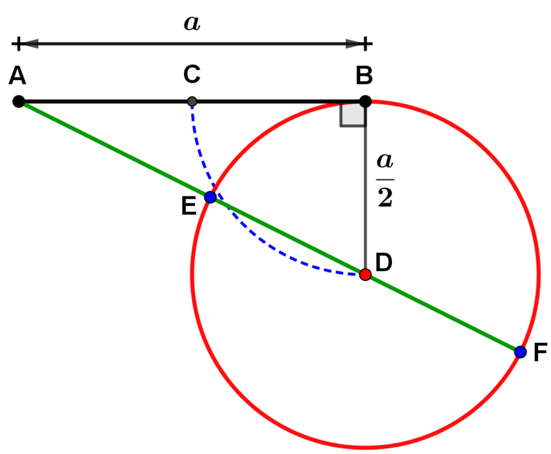


Figura 2.69

A) $\overline{AD}$
B) $\overline{AF}$
C) $\overline{AE}$
D) $\overline{EF}$

Solución:

En la figura 2.69, como el radio de la circunferencia es $\frac{a}{2}$, entonces su diámetro es a, así que el segmento $\overline{EF}=a$. Además, los segmentos $\overline{BD}=\overline{ED}=\frac{a}{2}$ por ser un radio de la circunferencia.

Si se denomina al segmento $\overline{AE} = b$, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ΔABD se puede escribir:

$$\left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2$$

Y sustituyendo los datos descritos se obtiene:

$$\left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2 = \left(\overline{AE} + \overline{ED}\right)^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$$

Desarrollando la expresión:

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 + 2b\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{a^2}{4}$$

Aplicando la propiedad de cancelación de la adición, y simplificando la expresión que se obtiene es:

$$a^2 = b^2 + ab$$

Si se iguala a cero:

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

Ahora se dividen ambos miembros de la igualdad entre b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Si se denomina $\frac{a}{b} = \varphi$, se obtiene la ecuación cuadrática $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, cuya solución positiva es $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, es decir, es el número de oro.

Entonces se cumple que $\overline{AE} = b$, es el segmento áureo del segmento $\overline{AB} = a$, ver la figura 2.70:

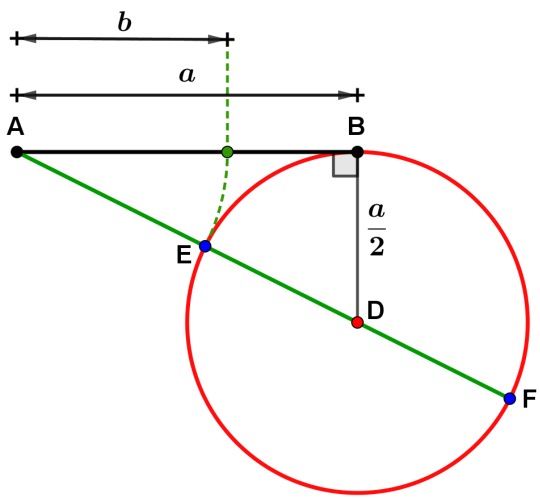


Figura 2.70

En conclusión, se deduce que la longitud del segmento a se obtiene multiplicando la longitud del segmento b por el número de oro ya que $\frac{a}{b} = \varphi$

Respuesta correcta: **C)** $\overline{AE}$

12.2 Nuevamente en la siguiente construcción identifica de qué segmento es áureo el segmento denotado por a:

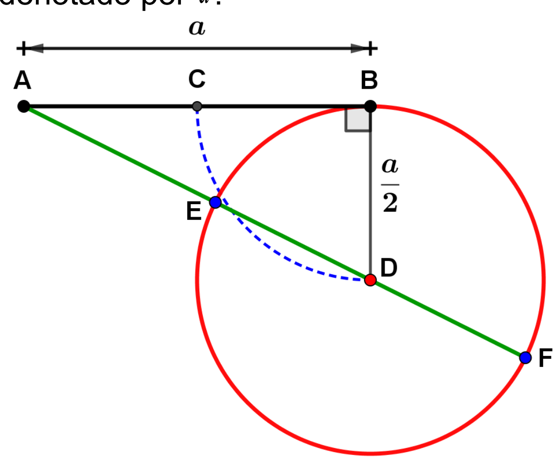


Figura 2.69

A) $\overline{AD}$
B) $\overline{AF}$
C) $\overline{BD}$
D) $\overline{EF}$

Solución:
En la construcción de figura 2.71, como el radio de la circunferencia de trazo continuo es $\frac{a+b}{2}$, entonces su diámetro es $a+b$, así que los segmentos

$\overline{GH} = \overline{HI} = \dfrac{a+b}{2}$. Además, el segmento $\overline{AI} = a$, tal como el diámetro de la circunferencia de trazo continuo y el segmento $\overline{AG} = a+b$.

Si se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo ΔAGH se puede escribir:

$$\left(\overline{AG}\right)^2 + \left(\overline{GH}\right)^2 = \left(\overline{AH}\right)^2$$

Y sustituyendo los datos descritos se obtiene:

$$\left(\overline{AG}\right)^2 + \left(\overline{GH}\right)^2 = \left(\overline{AI} + \overline{HI}\right)^2$$

$$(a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Desarrollando esta última expresión, tenemos:

$$(a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$(a+b)^2 + \frac{(a+b)^2}{4} = a^2 + 2a\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(a+b)^2}{4}$$

Aplicando la propiedad de cancelación de la adición, y simplificando la expresión que se obtiene es:

$$(a+b)^2 = a^2 + a(a+b)$$

Si se iguala a cero:

$$(a+b)^2 - a(a+b) - a^2 = 0$$

Ahora se dividen ambos miembros de la igualdad entre a^2:

$$\frac{(a+b)^2}{a^2} - \frac{a(a+b)}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} = \frac{0}{a^2}$$

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^2 - \frac{(a+b)}{a} - 1 = 0$$

Si se denomina $\dfrac{a+b}{a} = \varphi$, se obtiene la ecuación cuadrática $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, cuya solución positiva es $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, es decir, es el número de oro.

Entonces se cumple que $\overline{AB} = a$, es el segmento áureo del segmento $\overline{AF} = \overline{AG} = a+b$, ver la figura 2.71:

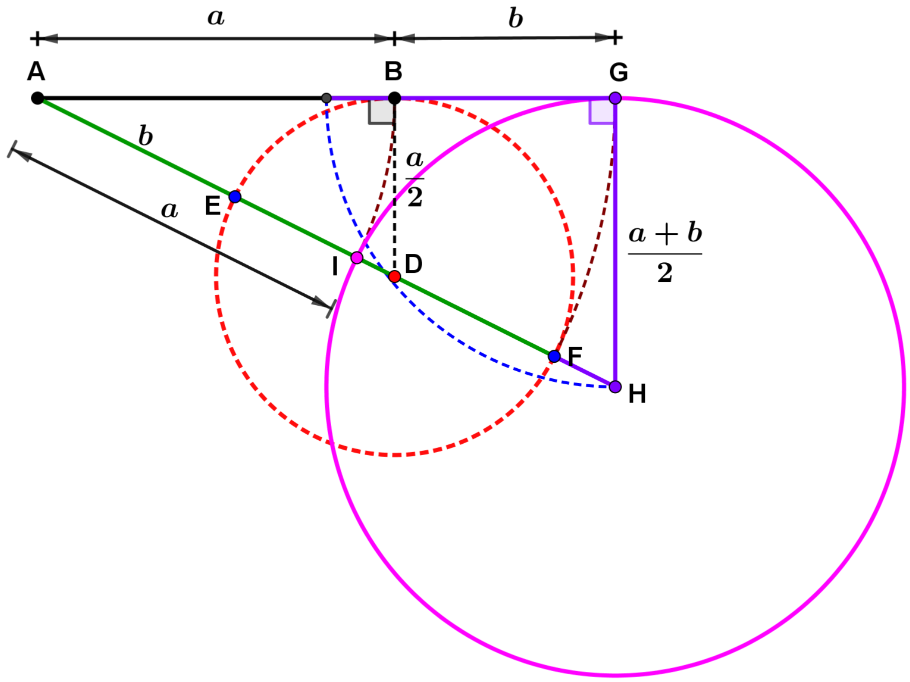


Figura 2.71

En conclusión, se deduce que la longitud del segmento $a+b$ se obtiene multiplicando la longitud del segmento a por el número de oro ya que $\dfrac{a+b}{a}=\varphi$

Respuesta correcta: **C)** $\overline{AF}$

12.3 En la figura 2.72, se muestra la construcción de un triángulo isósceles áureo ΔABL cuyo lado desigual $\overline{AB}=a$, es el segmento áureo de los dos lados iguales $\overline{AL}=a+b$ y $\overline{BL}=a+b$ determinar sus ángulos interiores:

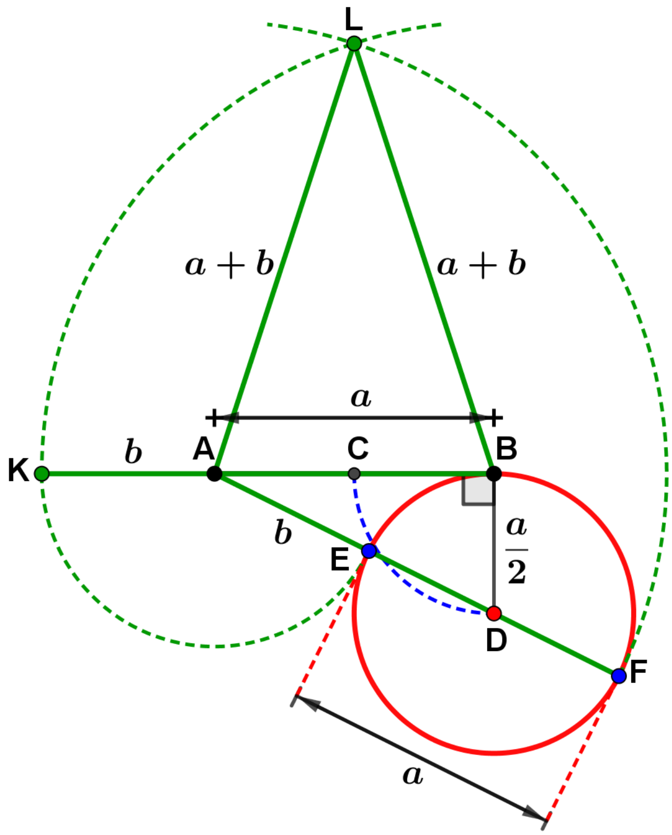


Figura 2.72 Triángulo isósceles áureo ΔABL

A) $\angle A = \angle B = 65^{\circ}$, $\angle L = 50^{\circ}$
B) $\angle A = \angle B = 70^{\circ}$, $\angle L = 40^{\circ}$
C) $\angle A = \angle B = 72^{\circ}$, $\angle L = 36^{\circ}$
D) $\angle A = \angle B = 75^{\circ}$, $\angle L = 30^{\circ}$

Solución:

Para determinar los ángulos interiores del triángulo isósceles ΔABL, se subdivide el lado $\overline{AL}$ en las longitudes a y b que lo forman, y se traza el segmento $\overline{BM}$. Entonces se forman los triángulos isósceles semejantes ΔABL y ΔABM de lados iguales cuyas longitudes son $a+b$ y a respectivamente, ya que comparten el mismo ángulo α en el vértice común A.
Si se denomina como β al ángulo en el vértice L del triángulo ΔABL, entonces también es β el ángulo en el vértice B del triángulo ΔABM. Pero como el ángulo en el mismo vértice B del triángulo ΔABL es α, se cumple que el lado $\overline{BM}$ del triángulo ΔABM es una bisectriz por lo que $\alpha = 2\beta$ como se muestra en la figura 2.73:

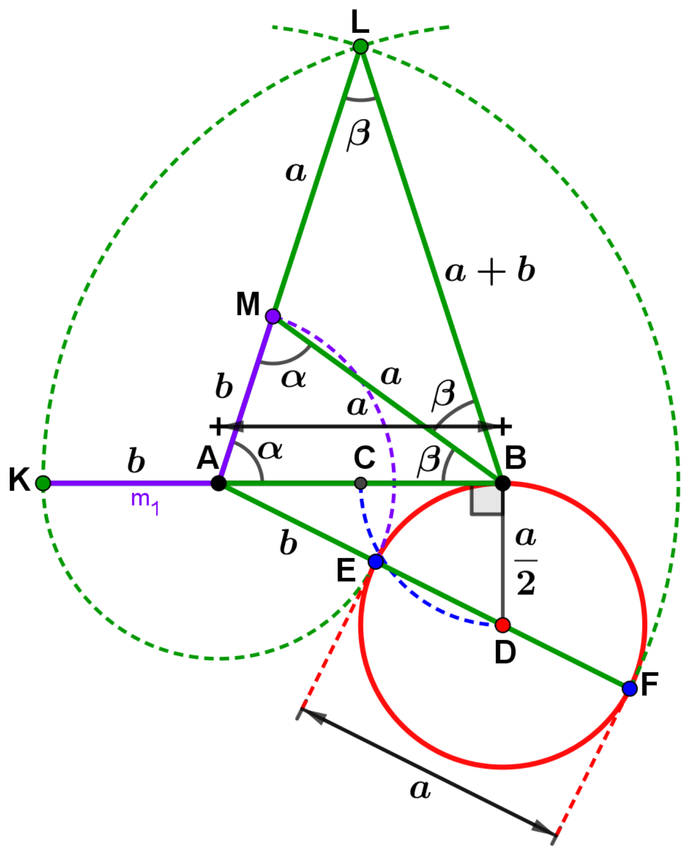


Figura 2.73

Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°, entonces en el triángulo ΔABL se obtiene:

$$5\beta = 180^{\circ}$$

$$\beta = \frac{180^{\circ}}{5}$$

$$\beta = 36^{\circ}$$

Y como $\alpha = 2\beta$, se cumple que:

$$\alpha = 2\beta$$

$$\alpha = 2(36^{\circ})$$

$$\alpha = 72^{\circ}$$

Respuesta correcta: **C)** $\measuredangle A = \measuredangle B = 72^{\circ}$, $\measuredangle L = 36^{\circ}$

12.4 En la figura 2.74 se construyó un pentágono regular áureo a partir de un triángulo áureo de lado desigual de longitud a y los lados iguales de longitud $a+b$, es decir, se cumple la proporción áurea $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

El procedimiento fue el siguiente:

Se trazaron las bisectrices de los ángulos interiores en los vértices A y B.
En seguida se trazaron las mediatrices de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo áureo. Y se determinan las dos intersecciones D y E de las rectas bisectrices y mediatrices las cuales localizaron dos vértices del pentágono regular áureo. Y finalmente se trazaron los lados del pentágono uniendo sus vértices.

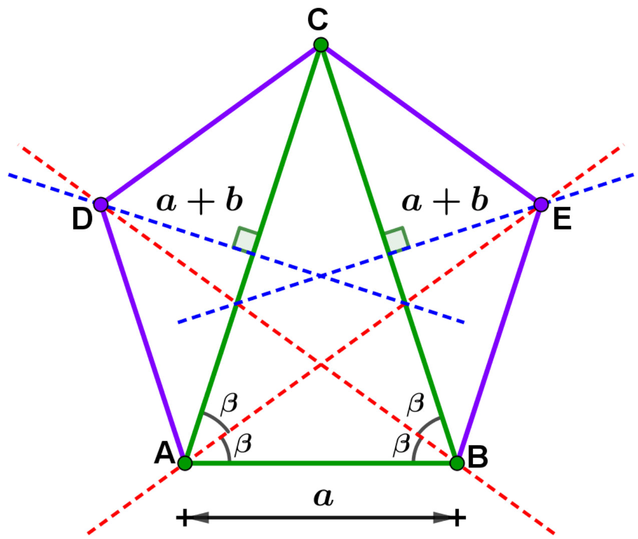


Figura 2.74 Pentágono regular áureo

¿Qué longitud tienen sus diagonales si la base del triángulo áureo es $a=5$?

A) $\dfrac{-5+5\sqrt{5}}{2}$

B) $\dfrac{10+5\sqrt{5}}{2}$

C) $\dfrac{-10+5\sqrt{5}}{2}$

D) $\dfrac{5+5\sqrt{5}}{2}$

Solución:
Para determinar la longitud de las diagonales del pentágono regular áureo, se parte de la proporción áurea $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{a}{b}$, sustituyendo en ella el valor $a=5$:

$$\frac{5+b}{5}=\frac{5}{b}$$

Ahora se obtiene la ecuación cuadrática variable b:

$$\frac{5+b}{5}=\frac{5}{b}$$
$$b(5+b)=5(5)$$
$$5b+b^2=25$$
$$b^2+5b-25=0$$

Y se resuelve la ecuación aplicando la fórmula general:

$$b=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4(1)(-25)}}{2(1)}$$
$$b=\frac{-5\pm\sqrt{25+100}}{2}$$
$$b=\frac{-5\pm\sqrt{125}}{2}$$
$$b=\frac{-5\pm\sqrt{25(5)}}{2}$$
$$b=\frac{-5\pm\sqrt{25}\sqrt{5}}{2}$$
$$b=\frac{-5\pm 5\sqrt{5}}{2}$$

Como las diagonales tienen longitudes positivas, se considera la solución positiva de la ecuación, es decir:

$$b=\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$$

Ahora se obtiene la longitud de las diagonales obteniendo el valor de $a+b$:

$$a+b=5+\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$$
$$a+b=\frac{10}{2}+\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$$
$$a+b=\frac{10-5+5\sqrt{5}}{2}$$
$$a+b=\frac{5+5\sqrt{5}}{2}$$

Se comprueba que las longitudes de las diagonales tienen por segmento áureo la longitud de los lados del pentágono, es decir, $\frac{a+b}{a}=\varphi$

$$\frac{a+b}{a}=\varphi$$

$$\frac{\frac{5+5\sqrt{5}}{2}}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Respuesta correcta: **D)** $\frac{5+5\sqrt{5}}{2}$

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 13. El rectángulo diagonal en la Arquitectura
Los rectángulos han jugado un papel particular en la historia de la arquitectura. Y artistas como el pintor Paul Sérusier y Julián Gil Martínez de los siglos XIX y XX han creado sus obras fascinadas por la idea de una estética particular apegada a las relaciones geométricas. La fotografía de la figura 2.75 corresponde a una pintura de Julián Gil Martínez:

https://www.coleccionbbva.com/es/pintura/2550-rectangulo-raiz-cuadrada-plegado-1/
Figura 2.75

13.1 Utilizar cualquier escala, y calcular geométricamente con regla y compás la razón del largo al ancho del rectángulo negro. Si tu cálculo es correcto se descubrirá que la obra de Julián Gil Martínez se basa en los rectángulos de proporción:

A) $\sqrt{5}$
B) 2
C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$

13.2 La pintura de Julián Gil Martínez es un acrílico sobre madera lacada y sus dimensiones son $2004\,mm \times 1417\,mm$. Al centro se ha remarcado uno de los cuadrados que se pueden observar en la pintura, ver la figura 2.76 ¿qué longitud en milímetros tienen sus lados?:

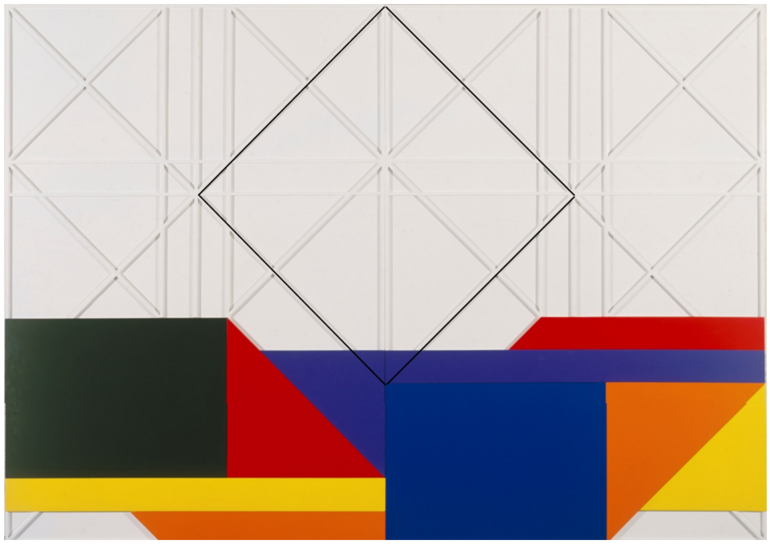


Figura 2.76
https://www.coleccionbbva.com/es/pintura/2550-rectangulo-raiz-cuadrada-plegado-1/

A) $22.38\,mm$
B) $21.40\,mm$
C) $20.38\,mm$
D) $19.40\,mm$

13.3 Determinar el área total en milímetros cuadrados que cubren en la pintura de Julián Gil Martínez los rectángulos de colores negro y azul marino y los triángulos de colores rojo y anaranjado.

A) $608\,907.33\,mm^2$
B) $659\,530.86\,mm^2$
C) $730\,688.80\,mm^2$
D) $831\,660.0\,mm^2$

13.4 Determinar el área en milímetros cuadrados que cubre en la pintura de Julián Gil Martínez la zona superior de color gris (ver figura 2.77).

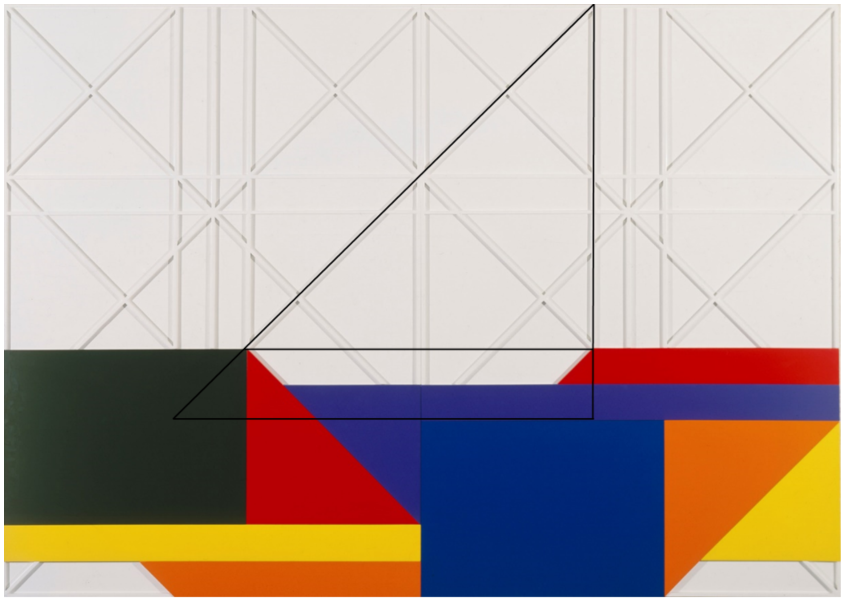


Figura 2.77
https://www.coleccionbbva.com/es/pintura/2550-rectangulo-raiz-cuadrada-plegado-1/

A) $2'180\,317.14\,mm^2$

B) $1'919\,465.17\,mm^2$

C) $1'791\,595.70\,mm^2$

D) $1'663\,726.29\,mm^2$

Situación 14. La $\sqrt{2}$ en la Geometría Euclidiana

Los mosaicos árabes (figura 2.78) son considerados por la ciencia como *geometría cuasicristalina decagonal avanzada* y es que **su simetría es casi perfecta**. Esto se debe a que los matemáticos eran quienes se encargaban de la composición de los mosaicos. Los árabes antiguos utilizaban compás y regla para elaborar patrones que posteriormente eran aplicados a los azulejos con formas de polígonos, decágonos, pentágonos, diamantes, hexágonos, etc. Destacan por su estética multicolor, con formas arquitectónicas y composiciones que realzan la belleza a donde se les coloque.

Figura 2.78 Mosaico árabe
https://bit.ly/36eN3yd

14.1 En la fotografía de la figura 2.79 se observa la siguiente construcción geométrica:

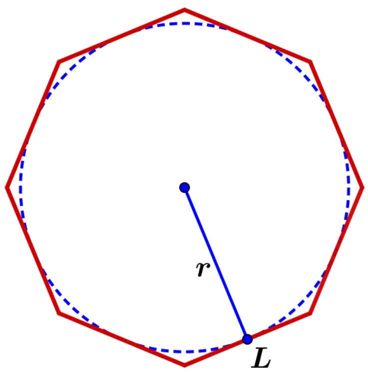


Figura 2.79 Octágono regular

El lado del octágono regular en términos del radio de la circunferencia inscrita es:

A) $L = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

B) $L = \dfrac{r\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

C) $L = 2r\left(\sqrt{2}-1\right)$

D) $L = \dfrac{r\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$

14.2 En la fotografía de la figura 2.79 se observa la siguiente construcción geométrica:

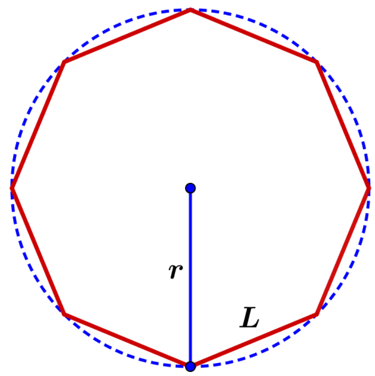


Figura 2.80

El lado del octágono regular en términos del radio de la circunferencia circunscrita es:

A) $L = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

B) $L = \dfrac{r\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

C) $L = 2r\left(\sqrt{2}-1\right)$

D) $L = \dfrac{r\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$

14.3 En la fotografía de la figura 2.79 se observa la siguiente construcción geométrica:

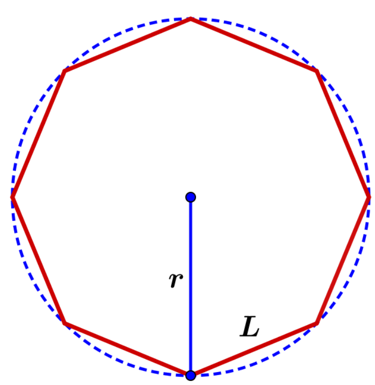


Figura 2.81

El área del octágono regular en términos de la longitud L de sus lados es:

A) $A = 8\left(\sqrt{2} - 1\right)L^2$

B) $A = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)L^2$

C) $A = 8\left(\sqrt{2} + 1\right)L^2$

D) $A = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)L^2$

14.4 En la fotografía de la figura 2.79 se observa la siguiente construcción geométrica:

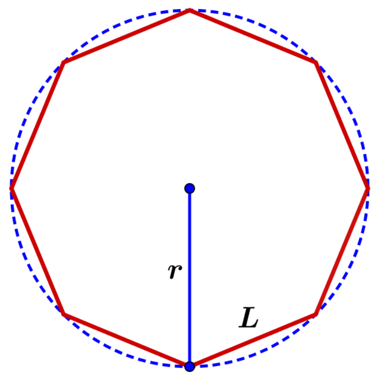


Figura 2.82

Área del octágono regular en términos del radio de la circunferencia circunscrita es:

A) $A = 6\sqrt{2}r^2$

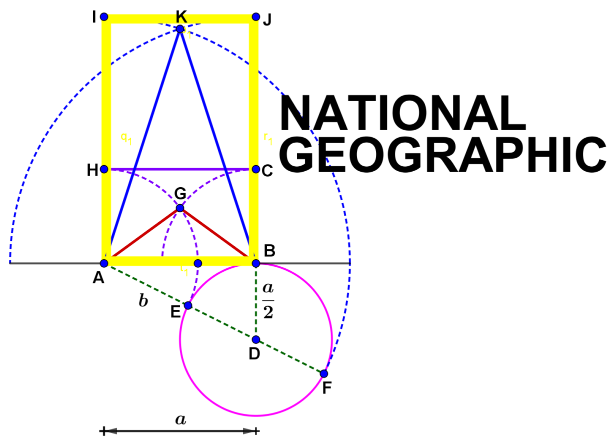
B) $A = 4\sqrt{2}r^2$

C) $A = 3\sqrt{2}r^2$

D) $A = 2\sqrt{2}r^2$

Situación 15. La proporción áurea en el entorno

Esta proporción ha fascinado desde hace siglos al ser humano, que lo ha considerado un indicador de la perfección y la estética. En el Renacimiento, muchísimos artistas y arquitectos compusieron sus trabajos con la intención de aproximarse a la proporción Áurea, convencidos de que esta relación atribuía a las obras un carácter estético especial. Por ejemplo, el hombre de Vitrubio, dibujado por Leonardo Da Vinci y considerado un ideal de belleza, está proporcionado según el número áureo. Lo mismo se afirma de las proporciones de la Gioconda o del Partenón.



Logotipo de National Geographic

Figura 2.83

15.1 Un ejemplo de diseño con la proporción áurea es el del logotipo de National Geographic, diseñado por el estudio neoyorkino **Chermayeff & Geismar** (http://www.cgstudionyc.com/identities/national-geographic). Aunque en apariencia parezca un simple rectángulo amarillo, en realidad este rectángulo respeta a la perfección las proporciones áureas. Un detalle muy apropiado para una marca centrada en la belleza de la naturaleza.

En la figura 2.83 se muestra este logotipo en el que se pueden apreciar rectángulos y triángulos áureos. Si el segmento $\overline{AB}$ tiene una longitud $a = 10\,cm$, ¿cuánto miden los ángulos interiores del triángulo isósceles áureo ΔABG?

A) $\measuredangle A = \measuredangle B = 30^{o}, \measuredangle G = 120^{o}$
B) $\measuredangle A = \measuredangle B = 36^{o}, \measuredangle G = 108^{o}$
C) $\measuredangle A = \measuredangle B = 40^{o}, \measuredangle G = 100^{o}$
D) $\measuredangle A = \measuredangle B = 35^{o}, \measuredangle G = 110^{o}$

15.2 El área exacta en centímetros cuadrados del triángulo ΔABG de la figura 2.83 es:

A) $25\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ cm^2$
B) $5\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ cm^2$
C) $25\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ cm^2$
D) $5\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ cm^2$

15.3 En la figura 2.83, ¿Cuál es el valor de la razón $\frac{\overline{AK}}{\overline{AG}}$?

A) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$

B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

15.4 En la figura 2.83 se cumple que el área del triángulo rectángulo ΔAJK en términos del número de oro φ es:

A) 25φ

B) 20φ

C) 15φ

D) 10φ

UNIDAD 3. PARADOJAS Y ACERTIJOS

Objetivos específicos

El alumno:

1. Desarrollará habilidades de análisis, razonamiento lógico, abstracción y argumentación, al explorar paradojas geométricas, lógicas y del infinito, para identificar y explicar las contradicciones.
2. Desarrollará habilidades de deducción, pensamiento lógico y estratégico a través de actividades lúdicas para resolver problemas.

Situación 1. Letrero paradójico
Cuando era pequeña, acompañé a mi mamá a visitar a mis abuelitos y en el camino había bardas pintadas con diferentes escritos como los que se muestran a continuación.

A)

B)

C)

D)

1.1 ¿Cuál de esos letreros es paradójico?

Paradoja

De acuerdo con la Real Academia, la palabra paradoja proviene del latín paradoxa que significa “lo contrario a la opinión común”.

De acuerdo con Gadner (2018), las hay de cuatro tipos:

1. Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas.
2. Afirmaciones que son verdaderas, aunque en realidad son falsas.
3. Cadenas de razonamiento aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas. (Las paradojas de esta clase suelen llamarse falacias.)
4. Declaraciones cuya veracidad o falsedad es indecidible.

Solución:
Observa que el letreo que dice “¡No pintar en esta pared!” contradice lo que está escrito, no es lógico que se indique que no pinten en la pared cuando ya lo han hecho.
Respuesta correcta: **C)**

La intuición tiene un papel muy importante en nuestro aprendizaje, desde pequeños la utilizamos en la escuela y en la vida cotidiana para explicar algunas situaciones en diferentes áreas del conocimiento, entre ellas las matemáticas. Con el paso del tiempo tenemos que desarrollar otras habilidades para justificar nuestras ideas más allá de nuestra intuición, sin embargo, las paradojas juegan con ella y a veces lo que escuchamos u observamos parece incorrecto o no podemos dar una explicación clara de la situación y nuestro pensamiento entra en conflicto.
Las paradojas están presentes en nuestra vida cotidiana y también en la ciencia como en la Física y la Matemática. Las paradojas matemáticas han contribuido en el desarrollo de la propia disciplina como la Teoría de conjuntos y la Lógica matemática.

Situación 2. Proposición falsa
Considera la siguiente declaración:
Aquí hay tres proposiciones falsas

1) $4-12\div(7-3)+8=3$
2) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=1$
3) $\left[6-(-8)\right]-\left[-4-(-10)\right]=0$
4) $3^{-1}(2)^{2}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

2.1 Las proposiciones falsas son

A) 1, 3 y 4
B) 1, 3 y el enunciado de la declaración
C) 1, 2 y 3
D) 1, 2 y el enunciado de la declaración

Solución:
Al resolver las operaciones se tiene que

- $4-12\div(7-3)+8=4-(12\div 4)+8=4-3+8=9$

  por lo tanto, la proposición (1) es falsa
- $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{3}-\frac{2(2)}{2(3)}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

  Por lo tanto, la proposición (2) es verdadera
- $\left[6-(-8)\right]-\left[-4-(-10)\right]=(6+8)-(-4+10)=14-6=8$

  Por lo tanto, la proposición (3) es falsa
- $3^{-1}(2)^2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

  Por lo tanto, la proposición (4) es verdadera

Como puedes darte cuenta, de las proposiciones numeradas (1) a (4) sólo se tienen dos de ellas falsas: la (1) y la (3), y la otra proposición es el enunciado de la declaración en la que se indica que se tienen tres proposiciones falsas.
Respuesta correcta: **B) 1,3 y el enunciado de la declaración**
Analiza más profundamente que hay detrás de esta situación.

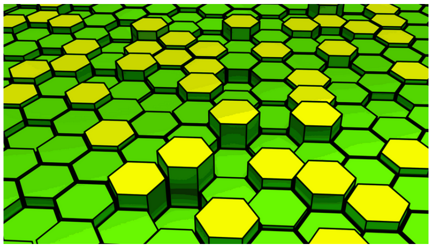
Situación 3. Enunciado y su negación
3.1 Considera el enunciado A: “Esta frase consta de siete palabras”. Si B es la negación de A, entonces A y B forman una paradoja, pues:

A) A es verdadero y B es verdadero
B) A es verdadero y B es falso
C) A es falso y B es verdadero
D) A es falso y B es falso

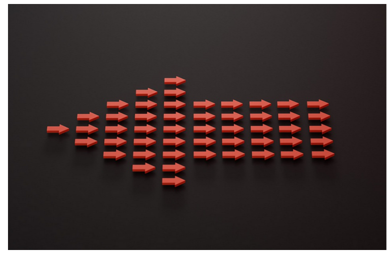
Solución:
Si A: “Esta frase consta de siete palabras”, su negación es B: “Esta frase no consta de siete palabras”. Como puedes darte cuenta, la frase A consta de seis palabras por lo que A es falsa, así que la negación B debería ser verdadera, pero el enunciado B consta de siete palabras por lo que también es falsa; aunque resulte paradójico.
Respuesta correcta **D) A es falso y B es falso**

Situación 4. Imagen paradójica

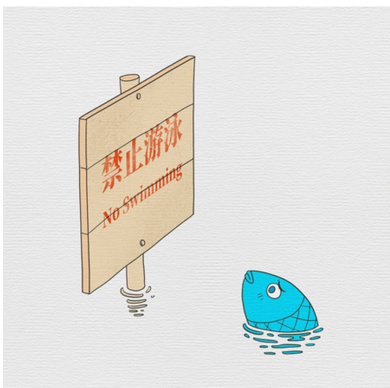
4.1 De las siguientes imágenes cuál no representa una paradoja



OpenClipart-Vectors
https://pixabay.com/es/vectors/hex%C3%A1gonos-imagen-utilizando-2026240/
A) Imagen 1



CDD20
https://pixabay.com/es/illustrations/direcci%C3%B3n-paradoja-contradicci%C3%B3n-6839518/
B) Imagen 2

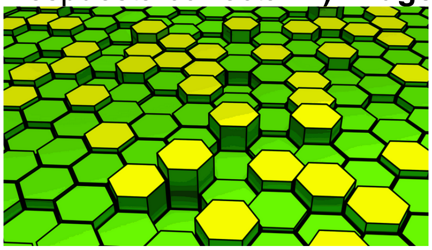


CDD20 Pixabay
https://pixabay.com/es/illustrations/cuadro-creatividad-prohibici%C3%B3n-4812481/
C) Imagen 3

CDD20 Pixabay
https://pixabay.com/es/illustrations/iluminaci%C3%B3n-imaginaci%C3%B3n-creatividad-5173552/
D) Imagen 4

Solución:
Tres de las imágenes rayan en lo absurdo, debes prestar mucha atención para que puedas determinar cuáles de ellas desconciertan.
En la imagen (1) se tiene un recubrimiento del espacio con prismas hexagonales, lo cual no tiene nada que esté en contra de nuestra intuición
En la imagen (2) se tiene una flecha grande en una dirección, conformada por flechas pequeñas dirigidas en dirección opuesta a la anterior. ¿Qué dirección elegirías para ir a un lugar si para llegar a él se te dice que sigas las flechas?
En la imagen (3) hasta el pez se ha asombrado por el letrero que está en el lago. ¿Qué debe hacer el pez?
En la imagen (4) al utilizar el lápiz para dibujar la imagen, ésta se va creando a sí misma.

Respuesta correcta: **A) Imagen 1**

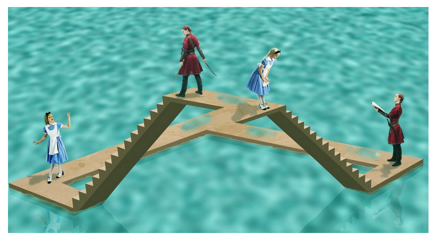


Existen imágenes que resultan ser un tanto ambiguas porque las podemos percibir de manera diferente y también pueden resultar contradictorias o al menos nos deja pensando.
A continuación, se presentan algunas imágenes para que las analices e indiques lo que observas. Recuerda, las apariencias engañan.

GDJ

https://pixabay.com/es/vectors/cr%C3%A1neo-cabeza-ilusi%C3%B3n-%C3%B3ptica-humano-2858764/

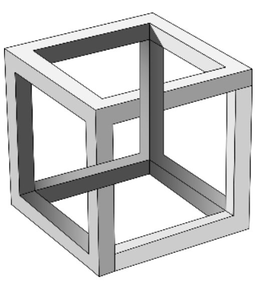
¿Qué observas?



Ctribeiro

https://pixabay.com/es/illustrations/%C3%B3ptico-espejismo-mar-alicia-1708964/

¿La mujer de la derecha está arriba o abajo?

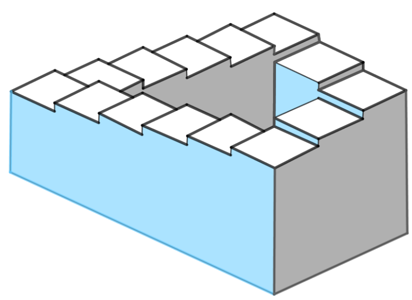


Cubo imposible de Nacker

OpenClipart-Vectors

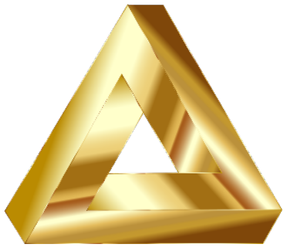
https://pixabay.com/es/vectors/cubo-escher-degradado-m-c-escher-1293954/

¿Se podrá construir el cubo en tercera dimensión?



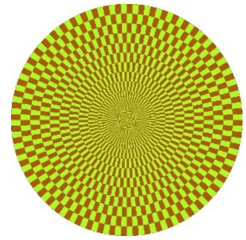
Escalera de Penrose

Si sólo subes o bajas la escalera no puedes pasar por un mismo punto, ¿qué sucede con esta escalera?



Triángulo de Penrose
GDJ
https://pixabay.com/es/vectors/penrose-tri%C3%A1ngulo-ilusi%C3%B3n-%C3%B3ptica-3163507/

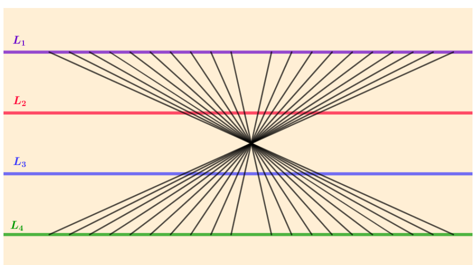
¿Se podrá construir el triángulo en tercera dimensión?



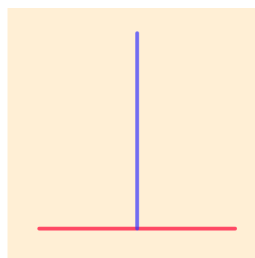
TheDigitalArtist

https://pixabay.com/es/illustrations/ilusi%C3%B3n-%C3%B3ptica-patr%C3%B3n-red-inspector-1740382/

¿La figura tiene movimiento propio?



¿ L_1, L_2, L_3 y L_4 son líneas rectas?



¿Qué segmento es más corto?

Situación 5. ¿Todos los números naturales son iguales?
A continuación, se mostrará por qué $1 = 2$
Para ello se partirá del hecho que $a = b$ (con $a \neq 0$), entonces se tiene la siguiente cadena de razonamientos.

Paso 1	$a^2 = a \cdot b$
Paso 2	$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2$
Paso 3	$(a+b)(a-b) = b(a-b)$
Paso 4	$a + b = b$
Paso 5	$a + a = a$
Paso 6	$2a = a$
Paso 7	$1 = 2$

5.1 ¿Dónde está el error en el razonamiento?

A) Suponer que $a=b$
B) Del paso (1) al paso (2)
C) Del paso (3) al paso (4)
D) Del paso (6) al paso (7)

Solución:
Sabemos que los números reales tienen varias propiedades que se cumplen para una igualdad, una suma o bien un producto, sin embargo, debemos tener cuidado en cumplirlas. En este caso analicemos cómo se justifican cada uno de los pasos del razonamiento

	$a=b$	No hay nada malo en suponer la igualdad
Paso 1	$a^2=a\cdot b$	Multiplicamos ambos lados de la igualdad por a
Paso 2	$a^2-b^2=a\cdot b-b^2$	Sumar de ambos lados de la igualdad por un número, b^2
Paso 3	$(a+b)(a-b)=b(a-b)$	Factorizamos las expresiones de ambos lados de la igualdad
Paso 4	$a+b=b$	Multiplicamos de ambos lados por el inverso multiplicativo de $a-b$
Paso 5	$a+a=a$	Sabemos que $a=b$
Paso 6	$2a=a$	Se simplifica la expresión
Paso 7	$1=2$	Se multiplica por el inverso multiplicativo de a

En apariencia parecer ser que todo está bien justificado, sin embargo, si pones mucha atención del paso (3) al paso (4) se está multiplicando por el inverso multiplicativo de $a-b$, es decir $\frac{1}{a-b}$. Pero ¿es válido?, ¿a qué es igual $a-b$?
Seguramente recuerdas que tus profesores te han dicho siempre que “no podemos dividir entre cero”, esto no es posible. En este caso, como se está partiendo de que $a=b$, entonces $a-b=0$. Por lo que las reglas no permiten la operación con $\frac{1}{a-b}$, no es un número real.
Así que el error está al pasar del paso (3) al paso (4)
Respuesta correcta: **C) Del paso (3) al paso (4)**
¿Te imaginas que la proposición $1=2$ fuera cierta? ¡Se podría demostrar que todos los números naturales son iguales! Veamos por qué.

Sabemos que	$3=2+1$
Pero como $1=2$	$3=1+1$
Entonces	$3=2$
De donde	$3=2=1$

Análogamente se tendría que $1 = 2 = 3 = 4 = ...$
Lo cual sería una locura.
A este tipo de paradojas se le conoce como falacia.

Falacia Es un argumento aparentemente válido, pero en realidad es falso

Situación 6. Área perdida
A continuación, se tienen dos rectángulos, cada uno de ellos se ha dividido en otras figuras geométricas: dos triángulos y dos trapecios.
6.1 Al observar ambas figuras indica cuál de las siguientes declaraciones es correcta.

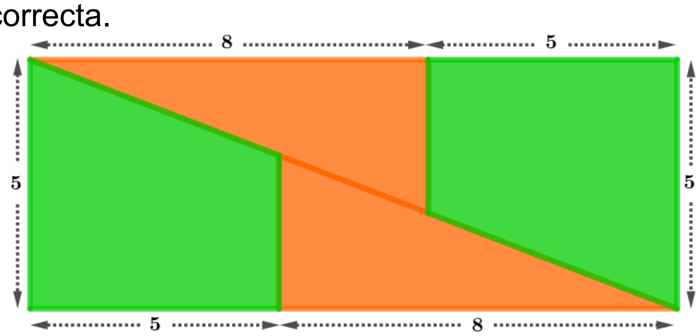


Figura 1.1 Rectángulo 1

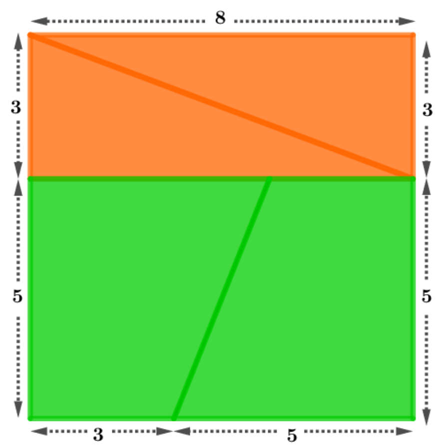
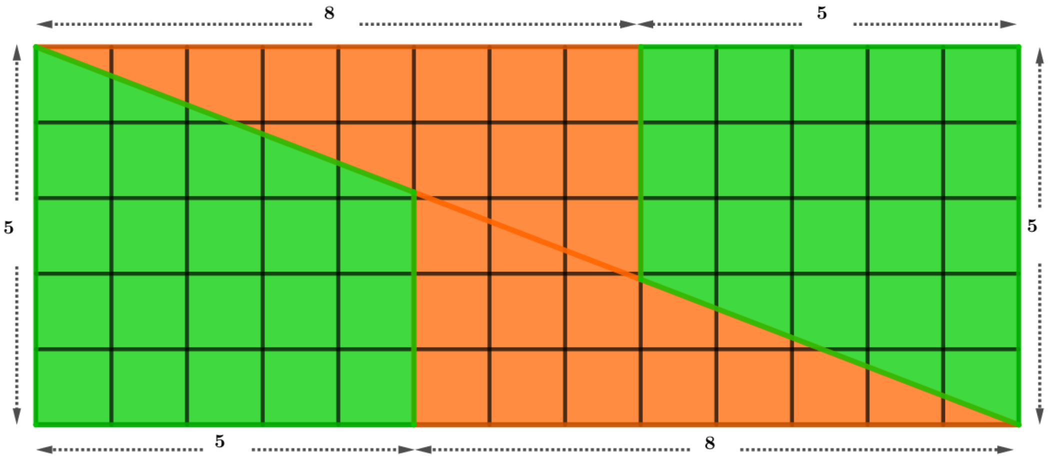


Figura 1.2. Rectángulo 2

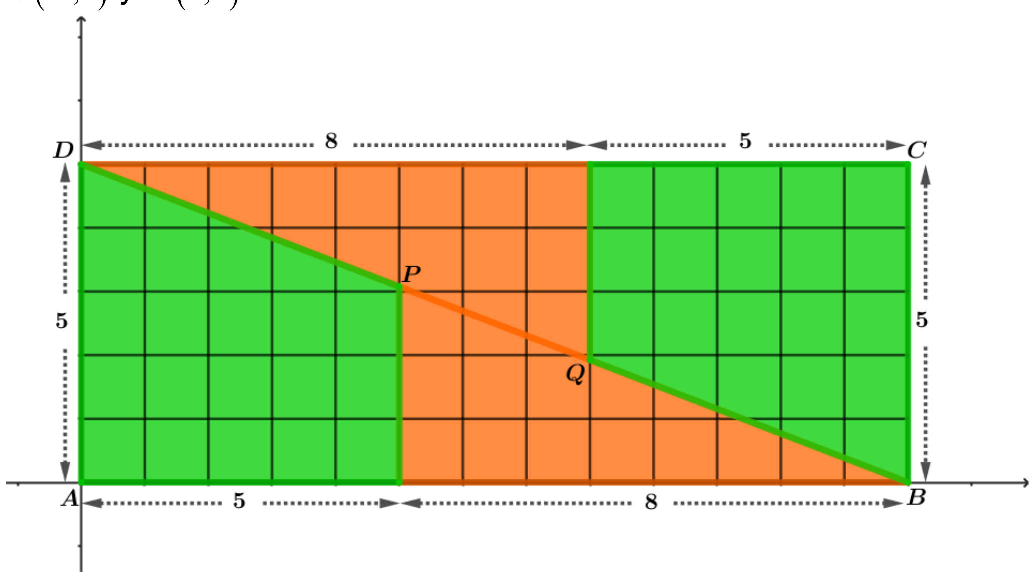
A) Las sumas de las áreas de las cuatro figuras geométricas en ambos rectángulos son iguales
B) Las sumas de las áreas de las cuatro figuras geométricas en ambos rectángulos son diferentes
C) La Figura 2 no es un rectángulo
D) En la Figura 1 la base menor del trapecio es 3

Solución:
Como puedes darte cuenta en la Figura 1 se tienen un rectángulo de $13X5$ y en la Figura 2 se tiene un rectángulo de $8X8$, de donde las áreas de los rectángulos miden, respectivamente, $65\,u^2$ y $64\,u^2$. Así que las sumas de las áreas de las figuras geométricas formadas en los rectángulos no son iguales.
Respuesta correcta: **B) Las sumas de las áreas de las cuatro figuras geométricas en ambos rectángulos son diferentes**

De hecho, podríamos preguntarnos entonces por qué la suma de las figuras en ambos rectángulos es diferente, si pareciera que cada rectángulo se conforma de triángulos y trapecios aparentemente iguales.
En la Figura 2 se tienen dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden 8 u y 3 u, respectivamente; y dos trapecios cuya base menor, base mayor y altura miden respectivamente, 3 u, 5 u y 5 u.
¿Qué ocurre con la Figura 1? ¿Dónde está el error?
Consideremos el rectángulo, pero cuadriculado y además hagamos un zoom, ¿puedes observar qué ocurre?



Si analizas detenidamente el rectángulo pareciera que la medida de uno de los catetos del triángulo rectángulo no es 3 u como ocurre en el caso de la Figura 2.
Para demostrarlo, se sobrepondrá el rectángulo sobre el plano cartesiano, con dos de sus lados sobre los ejes coordenados y en el extremo inferior izquierdo en el origen; entonces los vértices del rectángulo estarían dados por $A(0,0)$, $B(13,0)$, $C(13,5)$ y $D(0,5)$.



Ahora podemos determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(13,0)$ y $D(0,5)$, la cual representa una de las diagonales del rectángulo.

Primero determinamos la pendiente:

$$m_{BD}=\frac{5-0}{0-13}=-\frac{5}{13}$$

Ahora se determinará la ecuación de la recta que pasa por B y D

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=-\frac{5}{13}(x-13)$$

$$y=-\frac{5}{13}x+5$$

Analizaremos si los puntos $P(5,3)$ y $Q(8,2)$ pertenecen a la recta.

Por lo que si $x=5 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{5}{13}(5)+5=-\frac{25}{13}+5=\frac{-25+65}{13}=\frac{40}{13}\approx 3.0769$

Entonces se tiene que el punto $P(5,3)$ no pertenece a la recta

Y si $x=8 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{5}{13}(8)+5=-\frac{25}{13}+5=\frac{-40+65}{13}=\frac{25}{13}\approx 1.9230$

Por lo que el punto $Q(8,2)$ tampoco pertenece a la recta

Así que podemos asegurar que los triángulos rectángulos solo tienen la medida de un cateto igual a 8 u, pero el otro no es 3, sino aproximadamente 3.0769 u. De donde los triángulos rectángulos y los trapecios no son exactamente iguales. De ahí que la suma de las áreas de las figuritas formadas en los rectángulos no sea igual.

Situación 7. La suma infinita

7.1 De las siguientes operaciones

1) $1+2+3+4+5+\ldots$
2) $1+1+1+1+\ldots$
3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

¿cuáles tienen como resultado un número finito?

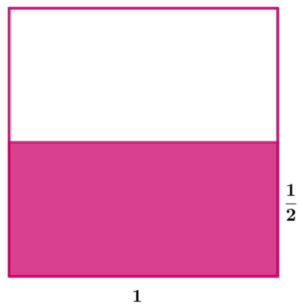
A) La suma (1)
B) La suma (2)
C) La suma (3)
D) Ninguna de las sumas indicadas

Solución:

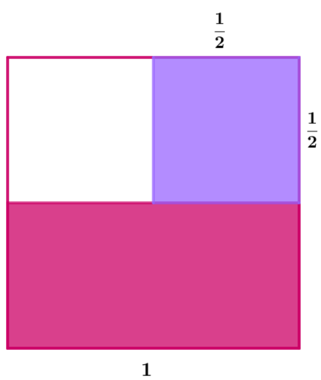
Intuitivamente podríamos pensar que la respuesta correcta corresponde al inciso D) pues en cada suma se tiene un número infinito de sumandos, por lo que pensaríamos que el número obtenido al realizar cada una de las sumas sea infinito.
Al analizar la primera suma podemos observar que va aumentando el valor de cada sumando por lo que es de esperar que la suma será infinita.
En la segunda suma, todos los sumandos son uno, por lo que la suma también será infinita.

¿Qué ocurre en la tercera suma?

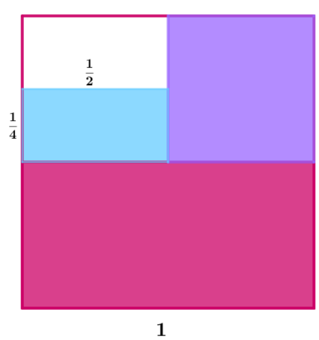
Para ilustrar el resultado pensemos en un cuadrado de lado uno, por lo que el área también es uno.



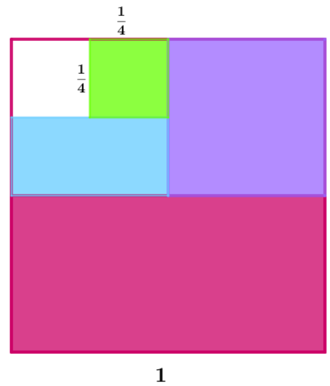
Se puede tomar el punto medio de dos lados opuestos de manera que se forme dos rectángulos de lados uno y un medio. El área de cada rectángulo es $\frac{1}{2}$. Se tomará el área de uno de dichos rectángulos (el sombreado de rosa)



Ahora para el rectángulo no sombreado, se tomará nuevamente el punto medio de dos lados opuestos y se formarán dos cuadrados de lado $\frac{1}{2}$. Por lo que cada cuadrado tendrá un área de $\frac{1}{4}$. Se tomará en cuenta uno de dichos cuadrados (el sombreado de morado)
Con esto podemos obtener que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ como se observa en la figura.

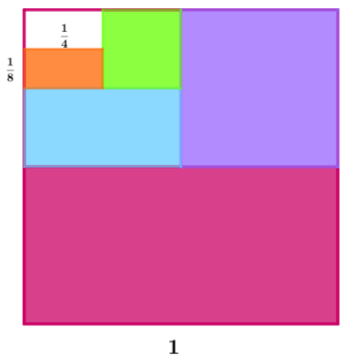


Análogamente, al dividir el rectángulo no sombreado en dos, al tomar los puntos medios de dos lados opuestos, se obtiene dos rectángulos cuyas medidas de sus lados son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. Entonces cada rectángulo tiene un área de $\frac{1}{8}$. Entonces obtenemos que ahora la suma de las áreas sombreadas es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$



Ahora, con un procedimiento análogo se estaría sumando las áreas sombreadas, obteniéndose

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$



El área sombreada para este paso sería

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

A medida que agregamos un sumando, la suma se va aproximando cada vez más a uno, en las imágenes se puede observar que las sumas de las áreas van cubriendo cada vez más el cuadrado de lado uno.

Entonces $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...=1$

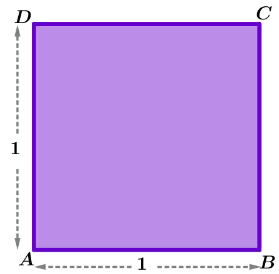
Por lo que la expresión $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...=1+1=2$

De donde la suma infinita de sumandos da un resultado finito, lo cual es sorprendente.

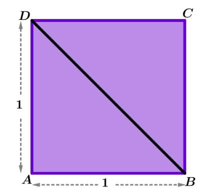
Respuesta correcta: **C) La suma (3)**

Situación 8. Escalera infinita

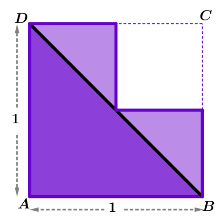
Considera un cuadrado $ABCD$ de una unidad por lado



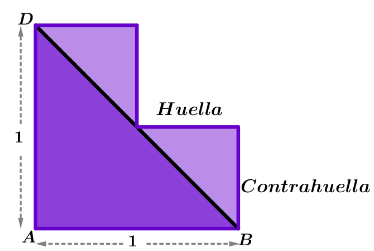
Ahora trazaremos la diagonal BD del cuadrado. Por teorema de Pitágoras $BD = \sqrt{2}$



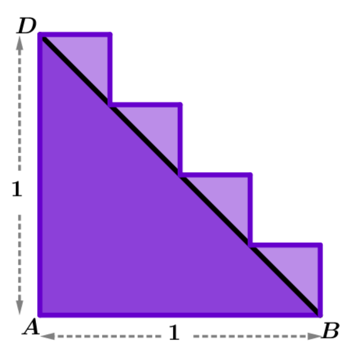
Toma los puntos medios de los segmentos BC, CD y BD; únelos como se muestra en la figura de la derecha, le llamaremos primera iteración.



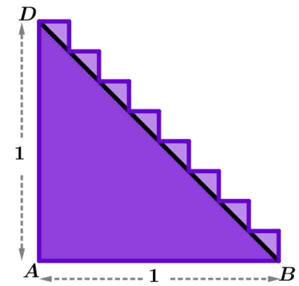
Observa que forma una escalera con dos escalones, donde la huella (segmento horizontal) y la contrahuella (segmento vertical) son iguales.



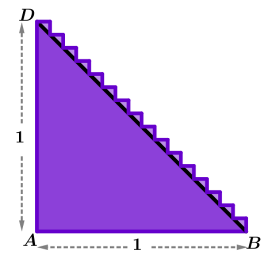
En la segunda iteración se toman los puntos medios de los segmentos obtenidos, resultando una figura con cuatro escalones, como se observa a la derecha



En la tercera iteración se tiene una figura con ocho escalones.
Y así sucesivamente



Observa que pareciera que al aumentar el número de iteraciones cada huella y contrahuella se van acercando más a la hipotenusa BD del triángulo ABD



8.1 En la n-ésima iteración, ¿cuántos escalones tiene la escalera?

A) $2n$

B) n^2

C) 2^{n-1}

D) 2^n

Solución:
Por cada escalón formado se vuelven a obtener dos en la siguiente iteración, de donde se tienen potencias de dos como podemos observar en la siguiente tabla

No. iteraciones *n*	No. escalones *E*
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$

De donde en la n-ésima iteración se tienen 2^n escalones
Respuesta correcta: **D)** $\boldsymbol{2^n}$

8.2 La longitud del segmento que corresponde a la huella (o contrahuella), en la n-ésima iteración es

A) $\frac{1}{n}$
B) $\frac{1}{2^n}$
C) $\frac{1}{n^2}$
D) $\frac{1}{2n}$

Solución:
Podemos elaborar una tabla de valores para ir determinando la longitud de las huellas formadas en los escalones

No. iteraciones n	Longitud de cada huella H
1	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^1}$
2	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$
3	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$
4	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$

De donde la longitud de cada huella en la n-ésima iteración es $\frac{1}{2^n}$

Respuesta correcta: B) $\mathbf{\frac{1}{2^n}}$

8.3 La suma de todos los segmentos, huellas más contrahuellas, que forman el contorno de la escalera, cuando se itera infinitas veces, es
A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) $2+\sqrt{2}$
D) Es imposible conocer la respuesta

Solución:
En las imágenes mostradas se puede observar que no importa cuantas iteraciones se tengan la suma de las longitudes de todas las huellas es siempre uno. También la suma de todas las contrahuellas es siempre uno. Así que la suma de todos los segmentos de las huellas y contrahuellas es dos.
Respuesta correcta: **A) 2**
Analiza nuevamente el enunciado de la situación 8. Como se menciona, pareciera que al aumentar el número de iteraciones cada huella y peralte se van acercando más a la hipotenusa BD del triángulo ABD, entonces si el número de iteraciones es infinito, ¿no sucedería que la suma de huellas y contrahuellas tendiera a la longitud de la hipotenusa BD,es decir, $\sqrt{2}$?
Entonces ¿se podría suponer que $\sqrt{2}=2$?, sería absurdo.
¿En qué radica el error de la suposición?

Como puedes darte cuenta, el infinito nos puede dar alguna mala jugada.

Situación 9. Hotel mágico
Sofía y sus nueve amigas han hecho reservaciones en un hotel para descansar un fin de semana y hacer algunas actividades al aire libre. Se citaron para verse en la central camionera, pero de último momento se integró una amiga más. Al llegar al hotel le preguntaron a la recepcionista si tendría una habitación más y ella les contestó que no, pero que no se preocuparan, que ella se encargaría de que cada una tuviera su habitación.
¡De acuerdo! -dijo la recepcionista- A cada una de ustedes le designaré un número, entonces a la persona número uno le otorgaré la habitación 101, y por el momento la persona número dos estará con la persona uno en la misma habitación. Entonces la persona tres le asignaré la habitación 102; a la persona cuatro, la 103; a la persona cinco la 104 y así sucesivamente. Entonces a la persona diez le toca la habitación 109 y queda una habitación libre, la 110 que se la daré a la persona número dos. Listo -dijo la recepcionista- cada una de ustedes tiene su propia habitación. La recepcionista muy contenta le dijo a su jefe que ella hacia magia pues acomodó a 11 personas en 10 habitaciones.
9.1 ¿Lo que dijo la recepcionista es correcto?, Si no es así, ¿qué es incorrecto en su afirmación?

A) Al hotel se presentaron diez personas y a cada una se le designó su propia habitación
B) Al hotel se presentaron once personas y se han hospedado en 10 habitaciones
C) Al hotel se presentaron once personas, pero sólo a diez se le asignó habitación
D) Al hotel se presentaron once personas y a cada una se le asignó una habitación

Solución:
El total de personas que llegaron al hotel fueron once, pues al principio eran 10 pero llegó una más. La encargada del hotel, al asignarles su habitación a todas

ellas, se olvidó por completo de la persona número once, no le asignó habitación, pues supuestamente al sobrar la habitación número 110, la asigna a la persona número dos que se encontraba por un momento en la habitación uno.
Respuesta correcta: C) Al **hotel se presentaron once personas, pero sólo a diez se le asignó habitación**

Como puedes darte cuenta, cuando el número de habitaciones es finito y hay una cantidad igual de habitaciones como de clientes ya no puede hospedarse un cliente más. Pero ¿qué sucede si el número de habitaciones es infinito?

Situación 10. Hotel Al infinito y más allá

Imagina que en la isla "Fantasía" está el Hotel Infinito el cual es muy bonito, tiene infinidad de actividades para pasar unas divertidas vacaciones, o disfrutar de un buen evento social. El hotel es tan fantástico que una infinidad de personas lo quiere conocer, al ser tan demandado, se anuncia que tiene un número infinito de habitaciones y por lo tanto puede albergar a una infinidad de huéspedes, y que aun sin reservación cualquier número de persona puede llegar y hospedarse. La agencia de viajes "El viaje feliz" llevó a *k* clientes a la isla Fantasía y aprovechó para llevarlos al Hotel Infinito. En el hotel dijeron que estaba lleno pero que conseguirían *k* habitaciones, una para cada cliente.

10.1 Si ninguno de los huéspedes previamente hospedados salió, ¿cómo le hizo el encargado del hotel para asignarles habitación a los *k* clientes de la agencia de viajes?

A) El encargado ya no les pudo asignar más habitaciones
B) El encargado pidió que fueran hasta el final de las habitaciones y ocuparan las siguientes *k* habitaciones
C) El encargado pidió a los huéspedes que ya estaban, recorrerse a la habitación número $n+k$ donde n es el número de habitación que ocupaba inicialmente
D) El encargado coloca a todos los clientes de la agencia en una sola habitación

Solución:

Dado que el número de habitaciones del hotel es infinito, entonces el encargado no pudo haber dicho que ya no había lugar, tampoco podía hospedar a todos en una misma habitación pues el encargado se comprometió a asignarle una habitación a cada uno de los *k* clientes que llegaron. Tampoco los podía mandar a la última habitación pues no hay una última, ya que el número de habitaciones es infinito. Una manera de acomodarlos es que el encargado solicite a cada huésped que se cambie a la habitación número $n+k$, donde n es el número de habitación que ocupaba inicialmente como se muestra a continuación.

Reacomodo de k huéspedes nuevos en el Hotel Infinito

Huésped	No de habitación
Nuevo 1	1
Nuevo 2	2
Nuevo 3	3
.	.
.	.
.	.
Nuevo k	k
Anterior 1	$1+k$
Anterior 2	$2+k$
.	.
.	.
.	.
Anterior n	$n+k$
.	.
.	.
.	.

Respuesta correcta: **C) El encargado pidió a los huéspedes que ya estaban, recorrerse a la habitación número $n+k$ donde n es el número de habitación que ocupaba inicialmente**

Y si al hotel llegara un número infinito de nuevos clientes, ¿se podrían acomodar en el Hotel infinito?, ¿Cómo se podría hacer este acomodo?

Acertijos y juegos de estrategia

Situación 11. Torres de Hanoi

Las torres de Hanoi es un juego atribuido al matemático francés Édouard Lucas en 1883 y está inspirado en una leyenda hindú en la que se cuenta que a los sacerdotes se les entregaban tres postes y una pila de 64 discos de oro de diferente tamaño. La idea era transferir los discos insertados en un poste a otro, con la condición de que sólo se puede mover un disco a la vez a otro de los postes, pero no se puede colocar un disco sobre otro más pequeño. Los sacerdotes trabajaron día y noche y se decía que al terminar su labor sería el fin del mundo.

En la siguiente imagen se tienen tres postes con siete discos de diferentes tamaños. En la figura 1 a) los discos están inicialmente en el poste izquierdo, y en la Figura 1 b) los discos se han transferido al poste central con las reglas indicadas a los sacerdotes.

Figura 1 a)

Figura 1 b)

11.1 Si se tuviera una torre de Hanoi con cuatro discos, ¿cuál sería el mínimo número de movimientos para transferirlos a otro de los postes?

11.2

A) 13
B) 14
C) 15
D) 16

Acertijo

De acuerdo con la Real Academia Española un acertijo es un enigma o adivinanza que se propone como pasatiempo.
Un acertijo matemático es un reto, enigma o juego que desafía nuestra mente y para resolverlo recurrimos a nuestra intuición, razonamiento lógico, pero también de nuestra imaginación y creatividad.
Resolver acertijos matemáticos estimula nuestro pensamiento lógico y crítico, pero también desarrollamos habilidades como la paciencia, la perseverancia, la confianza, la creatividad, el trabajo en equipo, etc.
En los acertijos matemáticos se pueden aplicar conceptos de distintas ramas de las matemáticas como aritmética, algebra, geometría, entre otras, además en muchos de ellos se generan patrones o secuencias que nos permiten hacer generalizaciones.

Te invitamos a que experimentes cada reto, recréalo, juega con otras personas y toma decisiones acertadas que te permitan dar solución a lo que se plantea, pero sobre todo diviértete.

Debes tomar en cuenta que una situación se podría resolver de varias maneras y aquí solo te mostramos alguna de ellas.

Solución:

Para encontrar la solución a la pregunta planteada, podemos preguntarnos qué pasa si el número de discos es más pequeño, por ejemplo, podemos suponer que primero tenemos un disco. Si solo tenemos un disco, digamos, en el poste izquierdo, entonces lo podemos mover al poste central (o al de la derecha), así que solo se requiere un solo movimiento para transferirlo a otro poste (Ver Figura 2 a) y b).

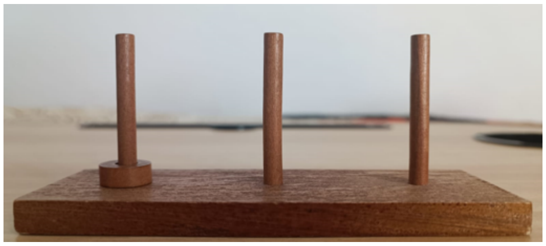
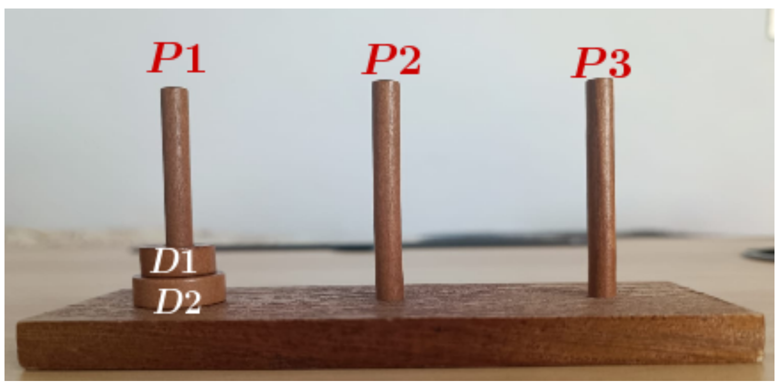


Figura 2 a)

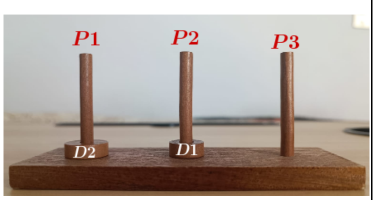
Figura 2 b)

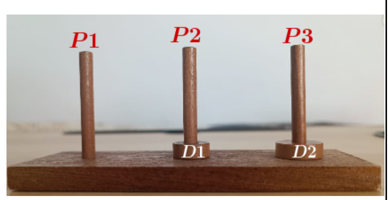
Veamos cuál es el mínimo número de movimientos cuando tenemos dos discos. Llamemos D1 al disco más pequeño, D2 al más grande y P1 al poste de la izquierda (donde inicialmente están los discos); P2, al poste central; y P3 al poste de la derecha, como se muestra a continuación.

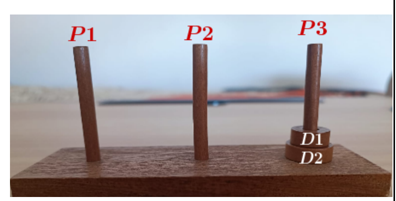


Entonces la estrategia para pasar los discos del poste 1 al poste 3, es:

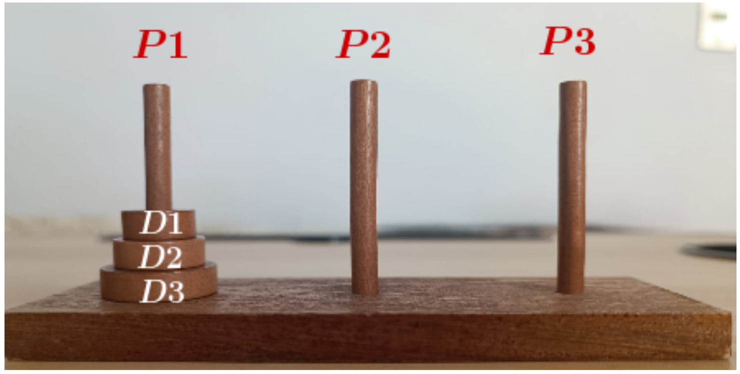
Paso 1	Mover D1 al P2
Paso 2	Mover D2 al P3
Paso 3	Mover D1 al P3







Si el número de discos es tres, D1, D2 y D3, del más pequeño al más grande, respectivamente, entonces la estrategia es:



Paso 1: Mover D1 al P2
Paso 2: Mover D2 al P3
Paso 3: Mover D1 al P3
Paso 4: Mover D3 al P2
Paso 5: Mover D1 al P1
Paso 6: Mover D2 al P2
Paso 7: Mover D1 al P2

La torre queda en el poste central. Al agregar un disco más a la torre se tendría que el mínimo número de movimientos para pasarla a otro poste es quince como se muestra a continuación.

Paso 1: Mover D1 a P2
Paso 2: Mover D2 a P3
Paso 3: Mover D1 a P3
Paso 4: Mover D3 a P2
Paso 5: Mover D1 a P1
Paso 6: Mover D2 a P2
Paso 7: Mover D1 a P2
Paso 8: Mover D4 a P3
Paso 9: Mover D1 a P3
Paso 10: Mover D2 a P1
Paso 11: Mover D1 a P1
Paso 12: Mover D3 a P3
Paso 13: Mover D1 a P2
Paso 14: Mover D2 a P3
Paso 15: Mover D1 a P3

Respuesta correcta**: C) 15**

11.3 El mínimo número de movimientos para pasar *n* discos de una torre a otra está dado por

A) n^2
B) $(n-1)^2$
C) $2^n - 1$
D) $\left(\frac{n}{2}\right)^2$

Solución:
Podemos elaborar una tabla de valores, con los resultados que obtuvimos cuando el número de discos es pequeño, en una columna indicaremos el número de discos y en la otra el número de movimientos.

No. de discos	No. de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15

Como puedes darte cuenta, el número de movimientos se puede transformar como potencias de dos, como se muestra a continuación.

No. de discos	No. de movimientos
1	$1=2^1-1$
2	$3=2^2-1$
3	$7=2^3-1$
4	$15=2^4-1$

Entonces podemos decir que el número de movimientos cuando se tiene n discos es 2^n-1
Respuesta correcta: **C)** ***2^n-1***

11.4 Suponiendo que la leyenda fuera cierta, es decir, que a cada sacerdote se le entregaran 64 discos de oro, y cada movimiento lo hicieran en un segundo, ¿cuántos años le llevaría a un sacerdote transferir la torre a otro poste?

A) $2.13X10^{14}$
B) $5.84X10^{11}$
C) 24372600723
D) 9749040289

Solución:

Sabemos que el número de movimientos para transferir los 64 discos a otro poste está dado por $2^{64}-1=1.84X10^{19}$ y si cada movimiento se hace en un segundo, entonces el valor obtenido es el número de segundos que se requieren para trasladar la torre de un poste a otro.
Vamos a pasar los segundos a años. Dado que un minuto tiene 60 segundos y en una hora hay 60 minutos; entonces un día tiene $(60)(60)(24)=86400$ segundos. Lo que significa que en un año hay $(86400)(365)=31536000$

Entonces el número de años que le llevaría al sacerdote pasar los discos de una torre a otra es $\frac{1.84X10^{19}}{31536000} \approx 5.84X10^{11}$

Como puedes darte cuenta son muchísimos años los que a los sacerdotes les llevaría cumplir con su mandato. De hecho, se estima la edad del universo en unos 13,800 millones de años, por lo que, haciendo una comparación entre ambas cantidades, observamos que $\frac{5.84X10^{11}}{13.8X10^{9}} \approx 42.38$, es decir, ¡tardarían más de 42 veces la edad del universo en cumplir su mandato!

Respuesta correcta: **B)** ***5.849424174X10*** ^{11}

Suponiendo que tienes tiempo para jugar con la torre de Hanoi por cinco horas y cada movimiento lo heces en un segundo, ¿cuántos discos, aproximadamente tendría la torre para que, en ese lapso traslades la torre de un poste a otro?

Situación 12. El juego de vasos

Ana, Luisa y Rosa acordaron ir a comer a un restaurante. El día de la cita Ana y Luisa llegaron primero y como de costumbre Rosa les dijo que llegaría tarde. Mientras ellas la esperaban pidieron una bebida y al poco rato estaban muy entretenidas inventando un juego. Las mesas del restaurante eran redondas y la base de los vasos también eran redondos por lo que, al levantar los vasos, éstos dejaban una huella circular del mismo radio en la mesa.

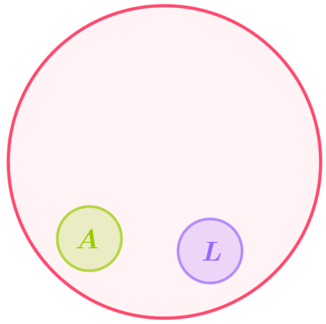
El juego consiste en colocar el vaso en la mesa y al levantarlo colocarlo en otro espacio de la mesa de manera que las huellas que deje no se sobrepongan. Además, el vaso no puede salir de la mesa. El juego es para dos personas y cada jugador debe levantar y colocar nuevamente su vaso en la mesa de manera alternada. Para iniciar el juego las amigas secan la mesa y tienen los vasos en sus manos, así que el juego comienza cuando se coloca el primer vaso en la mesa.

12.1 Si Luisa quiere ganar el juego, ¿cuál debe ser la estrategia para que ella gane?

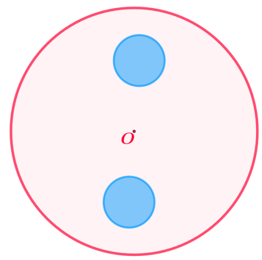
A) Que Ana comience el juego
B) Que Luisa Comience el juego
C) Que Luisa comience el juego y coloque el primer vaso en el centro de la mesa
D) Que Ana comience el juego y coloque el primer vaso en el centro de la mesa

Solución:

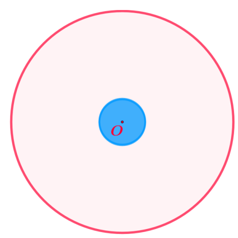
Representemos a la mesa y las huellas de los vasos por circunferencias. El radio de las huellas es menor que el de la mesa. Representemos por A, a las huellas del vaso de Ana (verde) y por L a las huellas del vaso de Luisa (morado) como se muestra a continuación. La mesa la representaremos con la circunferencia en rojo.



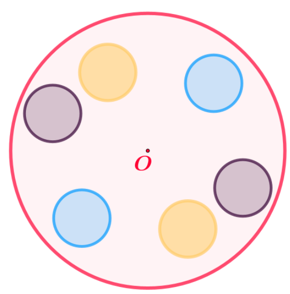
Nota que, si se tiene una circunferencia pequeña dentro de una circunferencia más grande, ella se puede reflejar con respecto al centro de la circunferencia más grande.



Por otro lado, una circunferencia pequeña puede colocarse en el centro de una circunferencia más grande, es decir pueden ser concéntricas.

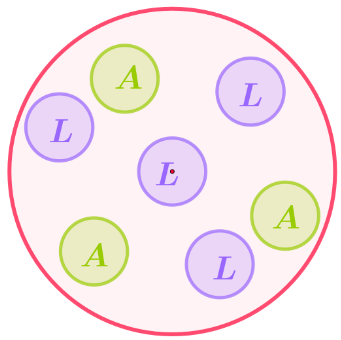


Observa que se pueden construir circunferencias pequeñas del mismo radio, sin que se traslapen, y sus respectivas reflexiones con respecto al centro de la circunferencia grande, que tampoco se traslapan



Con las dos observaciones anteriores, ¿puedes decir cuál es la estrategia para que Luisa gane el juego?

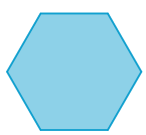
Luisa siempre podrá ganar, siempre y cuando ella comience y ponga vaso en el centro de la mesa, Ana tendrá que poner su vaso dentro de la mesa en un lugar disponible (que ya no será en el centro) sin que se traslape con el de Luisa. Si esto es posible entonces Luisa en su turno deberá poner ahora el vaso de manera simétrica con respecto al centro de la mesa, de acuerdo con cómo lo colocó Ana (ese lugar simétrico seguirá disponible). El siguiente turno es para Ana y si aún puede colocar el vaso en otra parte de la mesa entonces Luisa también, (posición simétrica del vaso de Ana), y así sucesivamente. Llegará un momento en que Ana ya no podrá colocar su vaso en otro espacio de la mesa, por lo que Luisa fue la última en colocar su vaso en la mesa y así Luisa ganará el juego.



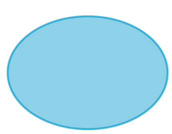
Respuesta correcta: **C) Que Luisa comience el juego y coloque el primer vaso en el centro de la mesa**

12.2 De las siguientes figuras, cuál no puede representar la forma de la mesa para jugar con las condiciones hechas para el juego.

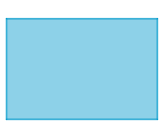
A)



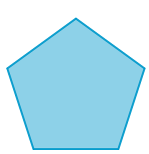
B)



C)

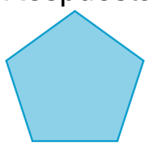


D)



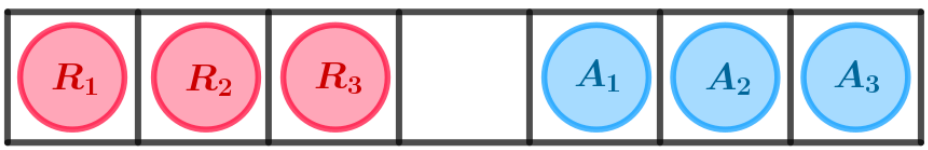
Solución:

Se puede jugar siempre y cuando la mesa sea simétrica con respecto a un punto (centro), como sucede con la forma de una elipse, un rectángulo, un hexágono regular y en general para un polígono regular, con un número de lados par. Por lo que el pentágono regular no cumple con ser simétrico respecto al centro
Respuesta correcta: **D)**

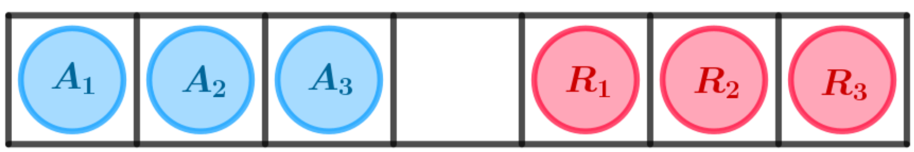


Situación 13. Fichas saltarinas

Supón que tienes seis fichas, tres rojas y tres azules, las cuales se han colocado en una casilla de siete cuadrados, tres a la derecha (azules) y tres a la izquierda (rojas) como se muestra a continuación.



El reto es pasar todas las fichas rojas del lado derecho y las azules del lado izquierdo como se muestra a continuación.



Las reglas del juego son las siguientes:

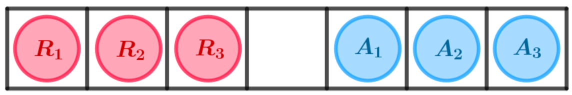
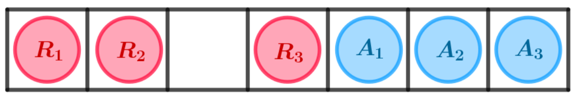
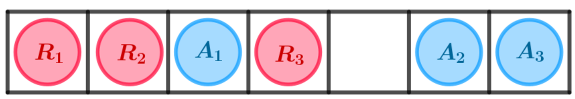
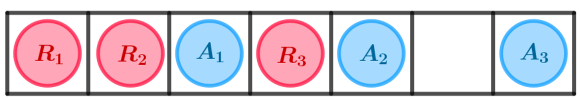
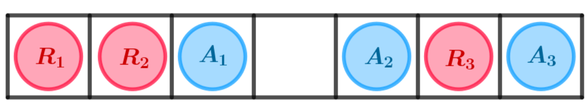
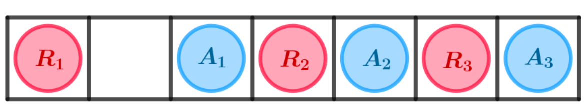
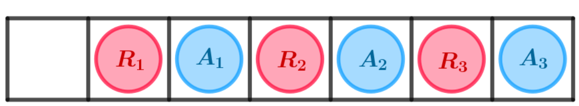
1) Las fichas azules sólo se pueden mover hacia la izquierda y las rojas hacia la derecha cuando haya una casilla vacía, es decir, no se pueden sobreponer fichas en una misma casilla.
2) Cuando hay una casilla vacía, una ficha puede saltar sobre otra (sólo una) para posicionarse en la casilla vacía, siempre y cuando las fichas sean adyacentes.

13.1 Con las reglas señaladas, ¿cuál es el mínimo número de pasos para intercambiar las posiciones de las fichas rojas y azules.

A) 13
B) 15
C) 17
D) 19

Solución:

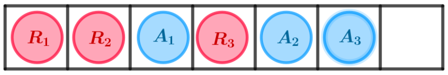
Para este juego es importante que no se te olviden las reglas, pues en ocasiones volvemos a llevar a su posición inicial a las fichas. Recuerda que lo importante de estos retos es que los juegues, te emociones y rectifiques lo que puedes hacer mal. Ayuda: la idea es tratar de intercalar las fichas de modo que tengas una ficha azul, luego una roja, etc. A continuación, mostramos una solución, en la que se comienza moviendo la ficha roja número 3. La otra solución es análoga (considerando las simetrías), pero en lugar de comenzar con la ficha roja se comienza con la ficha azul.

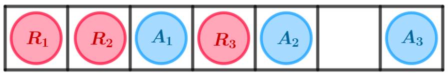
Posición inicial	
Paso 1	
Paso 2	
Paso 3	
Paso 4	
Paso 5	
Paso 6	

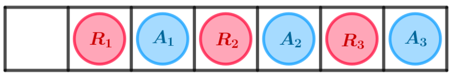
Paso 7	A_1	R_1		R_2	A_2	R_3	A_3
Paso 8	A_1	R_1	A_2	R_2		R_3	A_3
Paso 9	A_1	R_1	A_2	R_2	A_3	R_3	
Paso 10	A_1	R_1	A_2	R_2	A_3		R_3
Paso 11	A_1	R_1	A_2		A_3	R_2	R_3
Paso 12	A_1		A_2	R_1	A_3	R_2	R_3
Paso 13	A_1	A_2		R_1	A_3	R_2	R_3
Paso 14	A_1	A_2	A_3	R_1		R_2	R_3
Paso 15	A_1	A_2	A_3		R_1	R_2	R_3

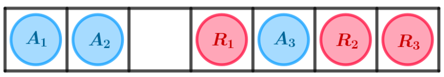
Respuesta correcta**: B) 15**

13.2 ¿Cuál de los siguientes pasos ya no permite continuar con el juego de las fichas saltarinas, de acuerdo con las reglas del juego?

A) 

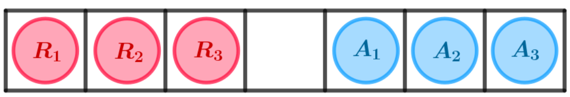
B) 

C) 

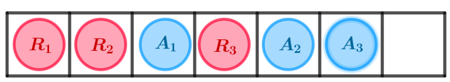
D) 

Solución:

Recuerda que la posición inicial de las fichas es la siguiente:



Entonces para la figura del inciso A) se tendría que mover la ficha roja número tres a la casilla vacía (pues las fichas rojas se deben mover a la derecha), pero el juego no lo permite pues sólo puede saltar una ficha. Además, la ficha azul número uno se tendría que mover hacia la izquierda, pero no hay manera de moverla. Los demás incisos corresponden a los pasos 3, 6 y 13 de la solución de la pregunta anterior.

Respuesta correcta: A) 

Situación 14. Pirámide numérica

Observa la siguiente figura, se trata de una pirámide de números. Nota que se pueden trazar varios caminos que pasen por los números desde la cima hasta la base, pero establezcamos la restricción de que para bajar solo se permite pasar por el número inmediato inferior derecho o izquierdo.

50

49 45

38 37 33

22 25 23 20

13 16 11 10 17

14.1 El número de caminos que se pueden recorrer desde la cima de la montaña hasta la base con la condición indicada es:

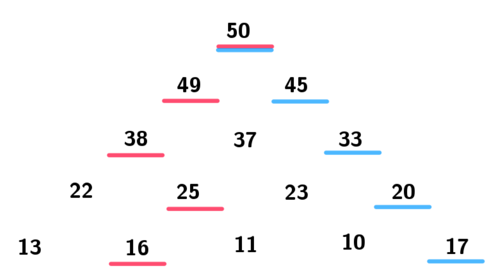
A) 15
B) 16
C) 17
D) 18

Solución:
Observa que, a partir de la cima, número 50, se tienen dos caminos, el de la derecha hacia 45 y el de la izquierda hacia 49 y por cada camino que se tenga al bajar nuevamente cada uno tendrá dos caminos, el de la derecha y el de la izquierda, por lo que el total de caminos que pueden trazarse es 16. También puedes contar el número de caminos trazando un diagrama de árbol.
Respuesta correcta B) 16

14.2 El camino con secuencia de números que se puede trazar de manera que la suma sea máxima es

A) 50, 49, 45, 38, 25
B) 50, 49, 38, 25, 16
C) 50, 45, 33, 23, 10
D) 50, 45, 33, 20, 17

Solución:
En este caso es mejor comenzar desde abajo hacia arriba para elegir los números más grandes. Entonces podemos observar que los números más grandes son 16 y 17.



Si tomamos el 17, entonces el único valor que le antecede es 20 y el que le precede es 33, y de este último 45 y el de la cima que es 50.
Si tomamos el número 16, entonces le anteceden los números 25 y 22, por lo que se elegiría 25. A 25 le anteceden los números 38 y 37, por lo que elige 38. A 38 solo le antecede 49 y a éste 50.
Así tenemos los caminos

1) 50, 45, 33, 20, 17
2) 50, 49, 38, 25, 16

La suma de los números del camino 1) es 165. Para el camino 2) es 178.
Respuesta correcta: **B) 50, 49, 38, 25, 16**

Situación 15. Rectángulos ocultos

Juan observó el patio de casa e identificó que tenía losetas cuadradas. También observó que una fila tenía ocho cuadrados, como se observa en la siguiente figura

15.1 ¿Cuántos rectángulos hay en dicha fila de cuadrados?

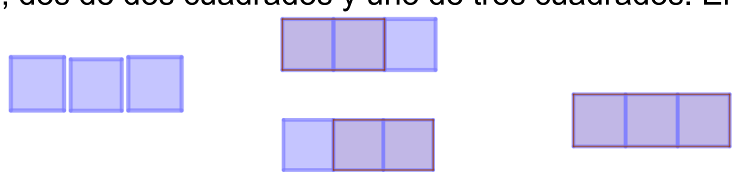
A) 30
B) 32
C) 34
D) 36

Solución

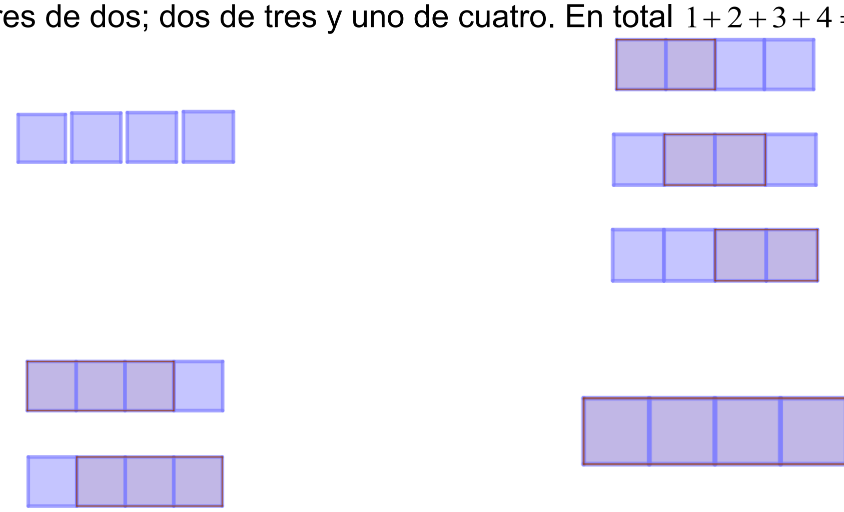
Para identificar el número de rectángulos podemos partir de casos más pequeños, por ejemplo, si solo hay un cuadrado, entonces se tiene un solo rectángulo (recuerda que un cuadrado es un rectángulo)

Si el número de cuadrados es dos, entonces habría tres rectángulos: cada uno de los cuadrados, y otro que se forma con los dos cuadrados. En total $1+2=3$

Si el número de cuadrados es tres, entonces se tendrían tres de rectángulos de un solo cuadrado, dos de dos cuadrados y uno de tres cuadrados. En total $1+2+3=6$



Si el número de cuadrados es cuatro entonces hay cuatro rectángulos de un cuadrado; tres de dos; dos de tres y uno de cuatro. En total $1+2+3+4=10$



Podemos darnos cuenta de que el número de rectángulos cuando tomamos toda la fila de los ocho cuadrados está dado por $1+2+3+4+5+6+7+8=(8+1)+(7+2)+(6+3)+(5+4)=9+9+9+9=36$

Respuesta correcta **D) 36**

15.2 ¿Cuántos rectángulos de tres cuadrados se pueden formar?

A) 7
B) 6
C) 5
D) 4

Solución:

Observa que, al obtener la solución de la primera pregunta, podemos obtener rectángulos formados por uno, dos, tres, etc., de acuerdo con el número de cuadrados que se vayan incluyendo.

En la siguiente tabla podemos organizar la información:

No. de cuadrados (n)	No. de rectángulos con n cuadrados							
n	1	2	3	4	5			
1	1							
2	2	1						
3	3	2	1					
4	4	3	2	1				
. . .		. . .						
8	8	7	6	5	4	3	2	1

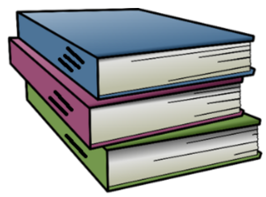
Entonces podemos darnos cuenta de que el número de rectángulos con tres cuadrados cuando se tienen los ocho cuadrados es seis

Respuesta correcta: **B) 6**

ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

Situación 14. Miscelánea de preguntas

14.1 En una mesa se encuentran tres tomos de un libro de Historia, uno junto al otro como se observa en la siguiente figura. Una polilla penetra por la parte exterior de la tapa delantera del tomo I y se abre paso a la parte de fuera de la tapa posterior del tomo III. Si cada tomo tiene un centímetro de espesor, ¿cuántos centímetros recorrió la polilla? (Northrop, 1968 pag. 1)

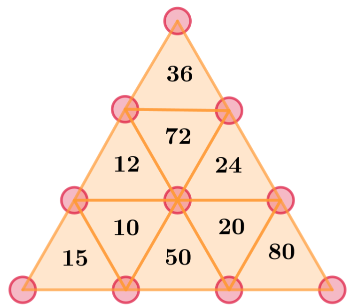


A) 0 cm
B) 1 cm
C) 2 cm
D) 3 cm

14.2 De los siguientes enunciados, el que no es una paradoja es:

A) Yo solo sé que no sé nada
B) Yo soy un mentiroso
C) Todos los cuervos son negros
D) Mi opinión es igual de importante que la de los demás

14.3 En la siguiente figura coloca en cada círculo uno de los números 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 8; de manera que el valor central de cada triángulo sea el producto de los tres vértices de dicho triángulo. Indica qué número va en el vértice central de los triángulos cuyo producto es 72, 12, 10, 50, 20 y 24; es decir en el centro del hexágono.



A) 1
B) 2
C) 5
D) 6

14.4 En el fondo de un pozo de 30 metros de profundidad hay una rana. Cada hora la rana sube tres metros y resbala dos, el número de horas que la rana tarda en salir es: (Northrop, 1968 pp. 18-19)

A) 27
B) 28
C) 29
D) 30

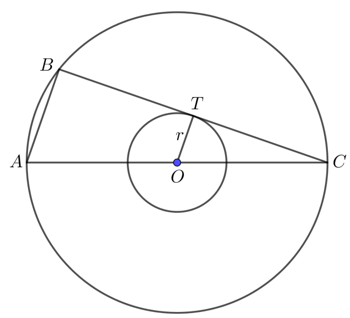
EXÁMENES TIPO EXTRAORDINARIO

Versión 001

1.- Un rectángulo de base $b=\frac{4}{3}cm$ y de altura $h=\frac{3}{5}cm$, es semejante a un rectángulo de dimensiones:

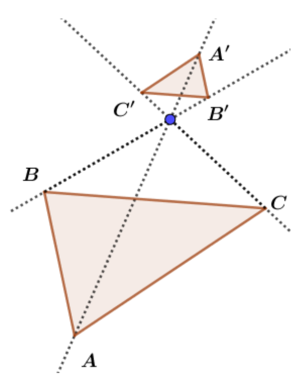
A) $b=\frac{3}{4}, h=\frac{5}{3}$ B) $b=\frac{3}{2}, h=\frac{1}{2}$ C) $b=\frac{5}{3}, h=\frac{1}{2}$ D) $b=\frac{1}{2}, h=\frac{9}{40}$

2.- El cociente entre los radios en centímetros de las dos circunferencias concéntricas de la figura es $\frac{1}{3}$. Si AC es un diámetro en centímetros de la circunferencia más grande, BC es una cuerda de esa misma circunferencia, tangente a la circunferencia pequeña en el punto T, y $AB = 12\ cm$, entonces el radio R en centímetros de la circunferencia grande es:



A) 24 B) 21 C) 18 D) 16

3.- El triángulo A'B'C' se obtuvo al aplicar una homotecia al triángulo ABC. ¿Qué se puede asegurar de k (la razón de homotecia)?:

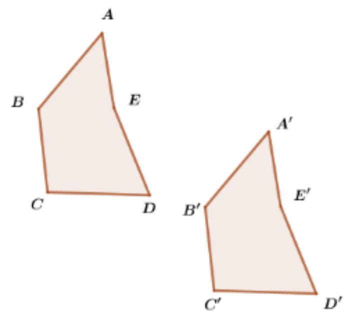


A) $0<k<1$ B) $-1<k<0$ C) $k<-1$ D) $k>1$

4.- Son dos números que están en razón áurea:

A) $1+\sqrt{5}, 2$ B) $10, 6.2$ C) $144, 89$ D) $\pi, \sqrt{2}$

5.- La transformación rígida única aplicada al polígono ABCDE para obtener el polígono A’B’C’D’E’ es:



A) rotación B) reflexión C) homotecia D) traslación

6.- ¿Qué transformaciones se han aplicado a este motivo generador para obtener el friso que se muestra?

A) Giros de 180º

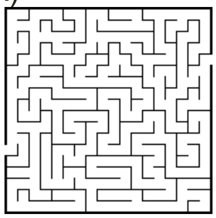
B) Simetría vertical y traslaciones

C) Reflexión con deslizamiento

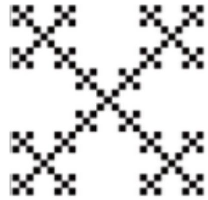
D) Simetría horizontal

7.- Es una imagen que presenta una estructura fractal:

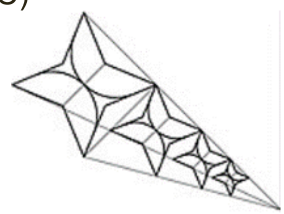
A)



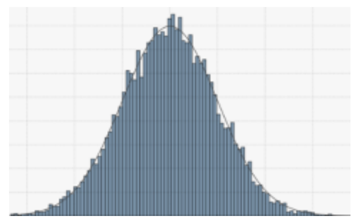
B)



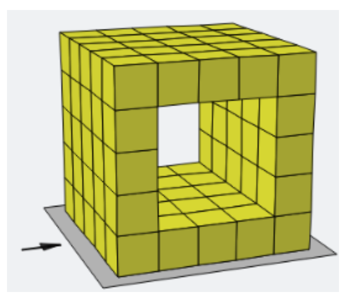
C)



D)



Considera el siguiente sólido construido con cubos del mismo tamaño. La flecha indica el frente del sólido y la vista lateral izquierda y derecha son iguales.



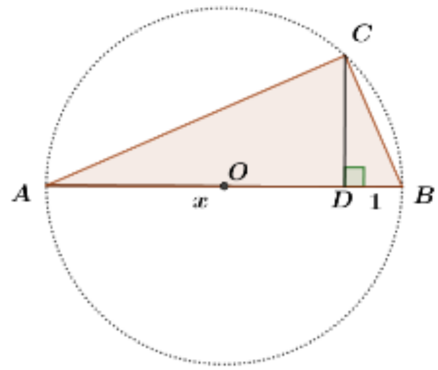
8. ¿Cuántos cubos se usaron para la construcción?

A) 101 B) 98 C) 89 D) 80

9.- Si se pintara el sólido (sin ser desarmado), ¿cuántos cubos quedarían con tres caras pintadas?

A) 8 B) 32 C) 44 D) 12

10.- En una circunferencia de diámetro $x+1$ se realiza la construcción que se muestra en la figura. Con base en la semejanza de triángulos se puede afirmar que la medida de $\overline{CD}$ es:



A) $\sqrt{x}$ B) $\sqrt{x+1}$ C) $\sqrt{x-1}$ D) $\sqrt{x^2+1}$

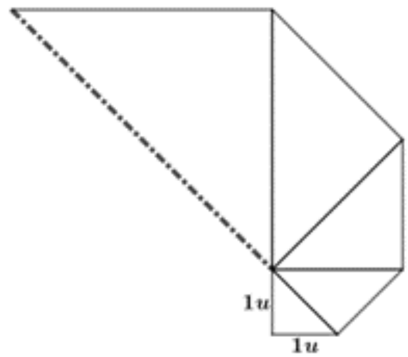
11.- Es el décimo término de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, …

A) 15 B) 33 C) 55 D) 89

12.- Dos números naturales diferentes son amigos si la suma de los divisores propios de cada uno, es igual al otro número. ¿Cuál de los siguientes números es amigo del 220?

A) 110 B) 250 C) 284 D) 300

13.- Los triángulos de la imagen son rectángulos e isósceles. Si los catetos del triángulo menor miden 1 u. ¿Cuánto mide el lado que se ha marcado con línea punteada?

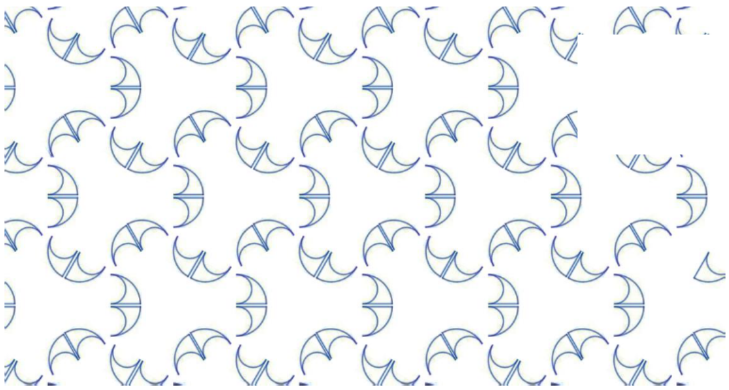


A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$ D) 4

14.- Un número capicúa es aquel número natural que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Una forma de obtenerlos es así: a partir de un número natural se le suma el que resulta de invertir el orden de sus cifras, y se repite el proceso las veces necesarias hasta obtener un número capicúa. Con base en este procedimiento, el número capicúa que se obtiene partiendo del número natural 278 es:

A) 6886 B) 1661 C) 1551 D) 8668

15.- ¿Qué características tiene el mosaico que se ha obtenido a partir del motivo generador que se muestra a la derecha?



A) rotación menor es de 45º, todos los centros de giro están en los ejes de simetría
B) rotación menor es de 60º, no todos los centros de giro están en los ejes de simetría
C) rotación menor es de 120º, no todos los centros de giro están en los ejes de simetría
D) rotación menor es de 90º, todos los centros de giro están en los ejes de simetría

16.- Es el número irracional que es igual al doble de su inverso multiplicativo:

A) $\sqrt{2}$ B) e C) π D) $\sqrt{2\pi}$

17.- Un número oblongo es el que se obtiene del producto de dos naturales consecutivos. ¿Cuál de los siguientes es un número oblongo?

A) 150 B) 190 C) 410 D) 600

18.- El habitante x del pueblo A, afirma que todos los habitantes del poblado A siempre mienten. La expresión anterior es una:

A) falacia B) paradoja C) conjetura D) demostración

19.- Revisa la siguiente cadena de proposiciones:

Por demostrar: $1 > 5$

Demostración:

1. $x \in (0,1)$
2. $x > x^5$
3. $\ln(x) > \ln(x^5)$
4. $\ln(x) > 5 \cdot \ln(x)$
5. $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)} > \dfrac{5 \cdot \ln(x)}{\ln(x)}$
6. $1 > 5$

Indica cuál es el primer renglón incorrecto.

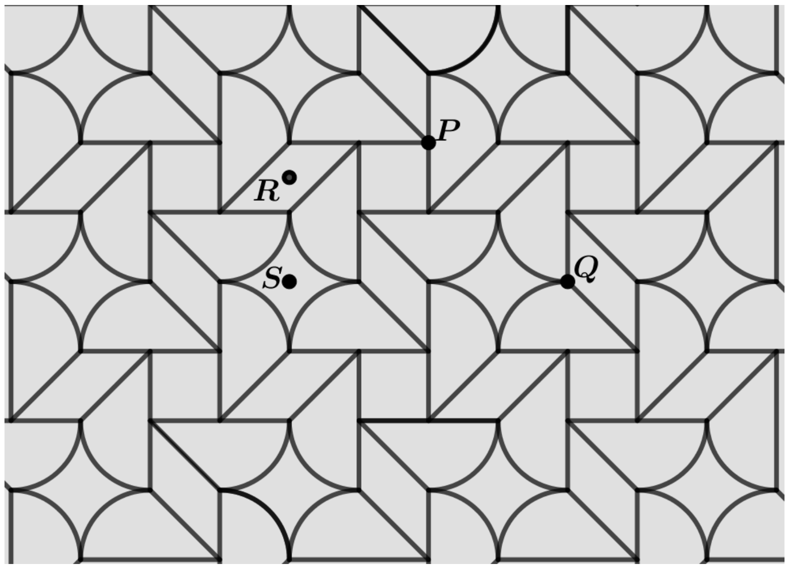
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

20.- Sobre una mesa se colocan quince chocolates, algunos de los cuales son blancos y el resto, amargos; y se plantea el siguiente juego entre dos personas que llamaremos A y B. De manera alternada tomarán y comerán cualquier cantidad de chocolates con la condición de que todos sean del mismo tipo. El ganador será el que se coma el último chocolate. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) No hay una estrategia ganadora, el ganador del juego es quien tenga más suerte
B) La persona que tome el primer turno puede ganar si deja el mismo número de chocolates de cada tipo, en cada turno que le toque.
C) La persona que tome el segundo turno puede ganar si deja en cada turno más chocolates blancos que amargos
D) La persona que toma el penúltimo turno siempre podrá ganar

Versión 002

I. Contesta las preguntas 1, 2, 3 y 4 a partir del mosaico que se presenta a continuación



1.- El mosaico tiene giro de 90° en el punto:

A) P B) Q C) R D) S

2.- El mosaico tiene un giro de 180° en el punto:

A) P B) Q C) R D) S

3.- Las transformaciones geométricas que generan el mosaico son:

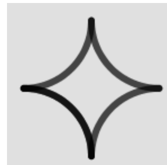
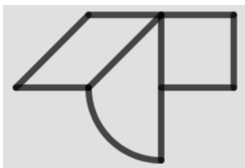
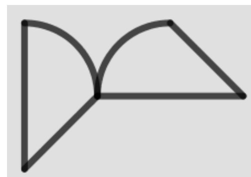
A) Giros de 90° y traslaciones

B) Giros de 180° y traslaciones

C) Giros de 120° y reflexiones verticales

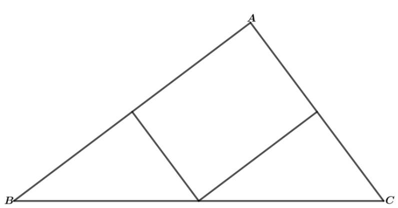
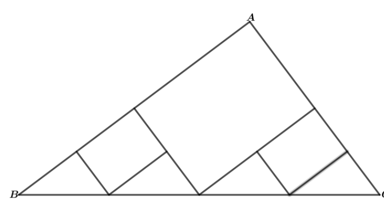
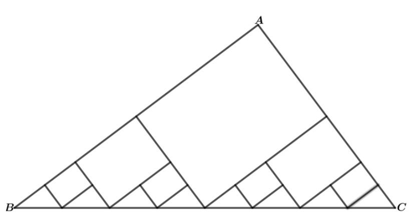
D) Giros de 60° y reflexiones con deslizamiento

4.- El motivo generador del mosaico es:

A) 	**B)** 
C) 	**D)** 

II. Contesta las preguntas 5, 6, 7 y 8 con la siguiente información.

Se tiene un triángulo ABC. Se toman los puntos medios de cada lado y se unen, obteniéndose un cuadrilátero y dos triángulos congruentes como se observa en la Figura 1. Posteriormente, en cada de los triángulos pequeños congruentes obtenidos en la Figura 1 se vuelven a unir sus puntos medios y se obtienen dos cuadriláteros congruentes y cuatro triángulos también congruentes entre sí, como se observa en la Figura 2; y así sucesivamente se pueden formar la Figura 3 y figuras subsecuentes.

 Figura 1	 Figura 2
 Figura 3	¿? Figura n

5.- El número de triángulos congruentes más pequeños en la Figura n está dado por:

A) 2^{n-1} B) 2^n C) $2^{n+1}+1$ D) 2^{n+1}

6.- Si el perímetro del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es P, el perímetro de cada uno de los triángulos congruentes más pequeños obtenidos en la Figura n es:

A) $\frac{P}{2^{n-1}}$ B) $\frac{P}{2^n}$ C) $\frac{P}{4^{n-1}}$ D) $\frac{P}{4^n}$

7.- La razón del área del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ con respecto al área del cuadrilátero de la Figura 1 es:

A) $3:1$ B) $2:1$ C) $1:3$ D) $1:2$

8.- Si el área del triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es $\boldsymbol{S}$, entonces el área de cada uno de los triángulos congruentes más pequeños obtenidos en la Figura n es:

A) $\frac{S}{2^{n-1}}$ B) $\frac{S}{2^n}$ C) $\frac{S}{4^{n-1}}$ D) $\frac{S}{4^n}$

III. Contesta las preguntas 9 y 10 con la siguiente información:

Un número natural se llama feliz si cumple que al sumar los cuadrados de cada uno de sus dígitos y repetir este proceso con las sumas obtenidas, llegamos en algún momento al resultado 1. Por ejemplo, el número 13 es feliz porque $1^2+3^2=10$; se hace lo mismo con el número 10 y se obtiene $1^2+0^2=1$

9.- De los siguientes números, todos son felices excepto:

A) 49 B) 68 C) 89 D) 97

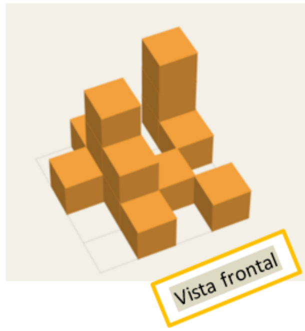
10.- El número 998 es feliz. Uno de los números que se obtiene en el proceso es:

A) 10 B) 19 C) 31 D) 68

11.- Un segmento de 80 cm se dividirá en proporción áurea, es decir que se dividirá en dos segmentos de longitudes a y b, de manera que $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. El valor b debe ser:

A) $-20+20\sqrt{5}$ B) $100-20\sqrt{5}$ C) $-40+40\sqrt{5}$ D) $120-40\sqrt{5}$

IV. Las preguntas 12 y 13 se refieren a la siguiente figura:

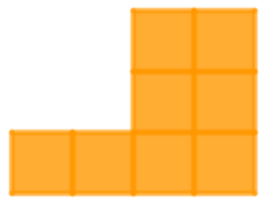


12.- La vista lateral derecha es:

A)


B)


C)


D)


13.- El número de cubos que forman la figura es:
A) 10 B) 12 C) 14 D) 15

14.- Adivina un número de tres cifras: toma en cuenta las pistas que se te dan para cada uno de los números de tres cifras que se muestran a continuación.

2 3 4	No tiene ninguna cifra en común con el número buscado (Indicación 1)
5 6 7	Tiene una cifra en común con el número buscado (Indicación 2)
7 2 3	Tiene una cifra en común pero mal colocada (Indicación 3)
6 5 8	Tiene una cifra común pero mal colocada (Indicación 4)
9 5 4	Tiene una cifra en común colocada en su sitio (Indicación 5)

El número que se busca es:
A) 987 B) 978 C) 897 D) 798

15.- Revisa la siguiente cadena de proposiciones

1. $4+2=6$
2. $(4+2)(4+2)=6(4+2)$
3. $(4)^2+2(4)(2)+(2)^2=6(4)+6(2)$
4. $(4)^2+(4)(2)-6(4)=-(4)(2)-(2)^2+6(2)$
5. $4(4+2-6)=-2(4+2-6)$
6. $4=-2$

Las proposiciones que intervienen en el primer error son:

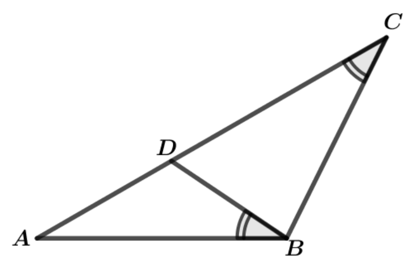
A) De la 2 a la 3

B) De la 3 a la 4

C) De la 4 a la 5

D) De la 5 a la 6

IV. Utiliza la información de la siguiente figura para contestar las preguntas 16 y 17



16.- La proposición que es verdadera de acuerdo con la información de la figura dada es:

A) $\mathrm{V}DCB : \mathrm{V}DBA$

B) $\mathrm{V}ACB : \mathrm{V}ABD$

C) El $\mathrm{V}ADB$ es isósceles

D) El $\mathrm{V}ABC$ es isósceles

17.- Si en la figura se sabe que $AD=3$ y $AB=5$, entonces la longitud del segmento DC es:

A) 3

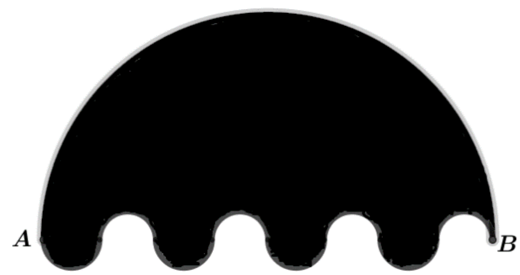
B) $\frac{16}{5}$

C) 5

D) $\frac{16}{3}$

V. Contesta las preguntas 18 y 19 a partir de la información que se indica a continuación.

En la siguiente Figura la semicircunferencia que tiene por diámetro el segmento AB tiene radio 1 y las semicircunferencias pequeñas son congruentes entre sí.



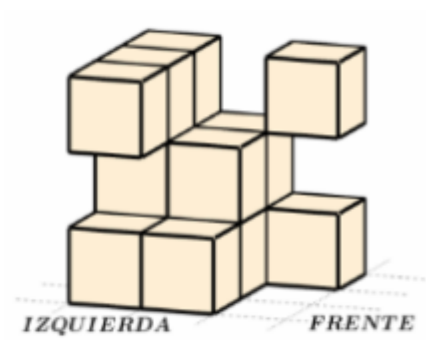
18.- El perímetro de la figura es:

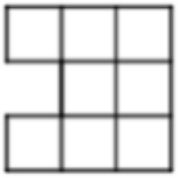
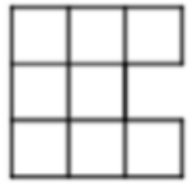
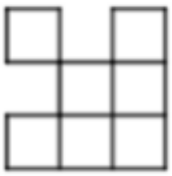
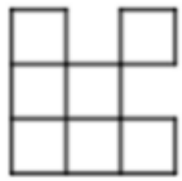
A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2π D) 4π

19.- El área de la figura es:

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2π D) 4π

20.- Dada la vista isométrica del siguiente cuerpo geométrico, ¿cuál de las siguientes figuras corresponde a la vista lateral derecha?



A) 	B) 
 C)	 D)

RESPUESTAS DE ACTIVIDADES DE REFORZAMIENTO

UNIDAD I

SITUACIÓN 13 Pintura a escala (p. 47)	
Reactivo	Respuesta
13.1	C
13.2	C
13.3	B
SITUACIÓN 14 La ventana dorada (p. 48)	
14.1	C
14.2	D
SITUACIÓN 15 Mosaicos (p. 49)	
15.1	A
15.2	A
SITUACIÓN 16 Triángulo de Sierpinski (p. 50)	
16.1	A
16.2	B
16.3	C
16.4	B
16.5	C
16.6	D
16.7	A
16.8	C
16.9	D
SITUACIÓN 17 Torre Multicubos (p. 52)	
17.1	D
17.2	C
17.3	B
17.4	D
SITUACIÓN 18 Módulo Multicubos I (p. 54)	
18.1	C
18.2	A
SITUACIÓN 19 Módulo Multicubos II (p. 55)	
19.1	B
19.2	A
19.3	C
19.4	D

UNIDAD 2

SITUACIÓN 13 El rectángulo diagonal en la Arquitectura (p. 145)	
13.1	D
13.2	A
13.3	B
13.4	C
SITUACIÓN 14 Raíz de 2 en la Geometría Euclidiana (p. 147)	
14.1	C
14.2	A
14.3	B
14.4	D
SITUACIÓN 15 La proporción áurea en el entorno (p.150)	
15.1	B
15.2	C
15.3	D
15.4	A

UNIDAD 3

SITUACIÓN 14 Miscelánea de preguntas (p.185)	
14.1	B
14.2	D
14.3	B
14.4	B

RESPUESTAS DE EXÁMENES TIPO EXTRAORDINARIO

Versión 01 (p. 187)	
1	D
2	C
3	B
4	A
5	D
6	C
7	B
8	D
9	B
10	A
11	C
12	C
13	B
14	B
15	C
16	A
17	D
18	B
19	D
20	B

Versión 02 (p. 194)	
1	D
2	C
3	A
4	A
5	B
6	B
7	B
8	D
9	C
10	A
11	D
12	C
13	C
14	A
15	D
16	B
17	D
18	C
19	B
20	C

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Unidad 1

1. Estrada, W. (2004). *Geometría Fractal. Conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
2. Hidalgo, L. (2007). Mosaicos. México: Instituto de Matemáticas de la UNAM.
3. Martin, G. (1982). *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. New York, U. S. A.: Springer.

Unidad 2

4. Rittaud B. (2009). Qué irracional. El fabuloso destino de $\sqrt{2}$. México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes: 1ª edición.
5. Nahin P. J. (2008). Esto no es real. La historia de i. México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes: 1ª edición.
6. Kasner E. y Newman J. (2007). Matemáticas e imaginación. México: Sociedad Matemática Mexicana: 2ª edición.
7. Stewart I. (2016). Números increíbles. México: Ediciones Culturales Paidós, Crítica M. R.: 1ª edición.
8. Capó M. (2017). Matemáticas del 1 al 100. Ediciones Culturales Paidós: 1ª edición.
9. Meavilla V. (2010). La sinfonía de Pitágoras. España: Editorial Almuzara: 1ª edición.

Unidad 3

10. Gardner, M. (2018). ¡Ajá! Paradojas que te hacen pensar. México: RBA Bolsillo
11. Northrop, E. (1968). Paradojas matemáticas. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana
12. Southwell, G. (2022). Paradojas. 100 paradojas filosóficas desde Aquiles a Zenón. China: Librero.

Recursos electrónicos

13. Taylor, R., Micolich, A. & Jonas, D. Fractal analysis of Pollock's drip paintings. Nature 399, 422 (1999). https://doi.org/10.1038/20833

14. Bradu. (1999). Site à vocation pédagogique Histoire-Géographie. Le Pharaon. Le pharaon est un Horus. Le roi Djet: “l’Horus serpent”. http://jfbradu.free.fr/egypte/LE%20PHARAON/le-pharaon03.php3
15. 15. Stott, R. (8 de abril 2020). *Foco: Kisho Kurokawa*. ArchDaily. https://www.archdaily.com/616907/spotlight-kisho-kurokawa

Imágenes no referidas en el texto

Pies de los frisos. Enero de 2019.
https://www.pinterest.com.mx/pin/342344009167967414/
Carita. Enero de 2019.
https://www.pinterest.com.mx/pin/658721882971605162/